



АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ, ПОПЕРЕЧНЫЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТАЯ ПЛАСТИНЫ

Яхшибоев Шерзод Рустамкулович

E-mail. sherzodyaxshiboyev@mail.ru тел. +99897 285-59-43

Доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам,

доцент. Самаркандский Государственный

архитектурно-строительный университет

<https://www.doi.org/10.5281/zenodo.7835037>

ARTICLE INFO

Received: 08th April 2023

Accepted: 16th April 2023

Online: 17th April 2023

KEY WORDS

Пластина, геометрическая нелинейность, деформация, смещение ребра, импульсное нагружение, прогиб, усилие.

ABSTRACT

Разработана теория нестационарных колебаний трехслойной вязкоупругой пластинки исходя из плоской постановки задачи на основе точных решений уравнений линейной теории вязкоупругости в преобразованиях. Получены уравнения колебания антисимметричных колебаний бесконечной в плане трехслойной пластинки относительно двух вспомогательных функций, являющихся главными частями перемещений некоторой промежуточной поверхности срединного слоя. Предложен алгоритм, позволяющий по полю искомым функций однозначно определить НДС произвольного слоя пластинки. Анализированы НДС исследуемой пластины поперечный шарнирный отпираний в краях.

Введение. Теория упругих и вязкоупругих пластин представляет собой один из разделов трехмерной теории упругости. В этом разделе рассматриваются такие задачи их расчета, при которых краевые условия на боковых поверхностях пластинки заданы в напряжениях. При этом построение основных соотношений теории пластин заключается в приведении трехмерной задачи к двумерной. Для достижения цели используют различные методы и подходы. Обыкновенно для этого применяют различного рода упрощающие гипотезы и предпосылки. Эти гипотезы и предпосылки вместе с упрощениями приводят к существенным недостаткам и погрешностям [1].

В последние десятилетия в различных областях техники и строительства широко применяются многослойные, в частности трехслойные пластинки. При этом во многих случаях динамические расчеты пластин проводятся по классической теории Кирхгофа. Поэтому, очень часто, такие расчеты оказываются пригодными только для низкочастотных колебательных процессов. К таким принадлежат немалое количество исследований. Анализ некоторых из них приведены в работах [2,3,4].

Из-за сложности динамических нелинейных уравнений трехслойных пластин, выполненных из композиционных материалов почти исключительно решение их, строится для случая малых нелинейных колебаний в первом приближении [5-7].



Не учтены влияние деформаций продольного сдвига которое влияние существенно для нелинейного колебания и динамической устойчивости смешанно закрепленной многослойной пластины [8].

Во многих работах с решением уравнения вынужденных нелинейных колебаний трехслойных пластин при гармонических возбуждениях построены амплитудно-частотной характеристики. Анализированы только качественный характер влияние геометрических и жест костных параметров на вид амплитудно-частотных характеристик различно закрепленных по контуру трехслойных пластин при вынужденных колебаниях [6-8].

Указанные недостатки относятся как классическим, так и уточненным теориям колебания пластин. Поэтому, многие исследователи предпринимали попытки уточнения дифференциальных уравнений колебания [9,10]. При этом стараются вывести уравнения колебаний, учитывающих те или иные факторы физического, механического или геометрического характера. Дальнейшее развитие и уточнение классической теории можно разделить на два направления: разработка асимптотических теории и теорий типа Тимошенко и Рейсснера[11]. Кроме того, в зависимости от учитываемых факторов, методы вывода дифференциальных уравнений колебания, основанные на динамической теории упругости, разделяются и другие на направления.

Для случая колебания многослойных пластин с малой нелинейности в классической нелинейной механике разработана достаточно много точных и приближенных методов исследования: метод малого параметра, метод гармонического баланса, метод Крылова-Боголюбова и др.

Одним из них является метод использования общих решений трехмерных задач динамической теории упругости, который развит в работе [4]. Существенное и успешное применение к задачам динамики этот метод получил в работах И.Г.Филиппова и его учеников [12,13]. Он основан на применении интегральных преобразований по координате и времени. В нем эффективно используется общие решения трехмерных задач теории упругости (вязко-упругости) в преобразованиях. В последующем эти решения разлагаются в степенные ряды для приближенного удовлетворения динамических условий, заданных на граничных поверхностях пластинки [14,15].

Сущность метода сводится к изучению построенных решений при различных типах внешних воздействий. Выяснение условий, при выполнении которых смещения или их «главные части» удовлетворяют несложным дифференциальным уравнениям в частных производных составляет основу метода [16]. Сюда относится и создание алгоритма, позволяющего по полю этих «главных частей» вычислять приближенные значения полей смещений и напряжений.

Ниже решена задача о нестационарном колебании трехслойной вязкоупругой пластины на основе методики работы [17] в случае пороречно шарнирно – оперение пластины.

Постановка задачи. Рассматривается бесконечная изотропная прямоугольная трёхслойная пластинка в конечных размерах, отнесенная к прямоугольной декартовой

системе координат $Oxyz$, $0 < x < a$, $0 < y < b$. Предполагается, что пространство между жесткими крайними слоями заполнено более лёгким, а следовательно, менее жестким материалом (заполнителем), удерживающим слои на этом расстоянии и осуществляющим их совместную работу. Принято также, что контакты между несущими слоями и заполнителем жесткие.

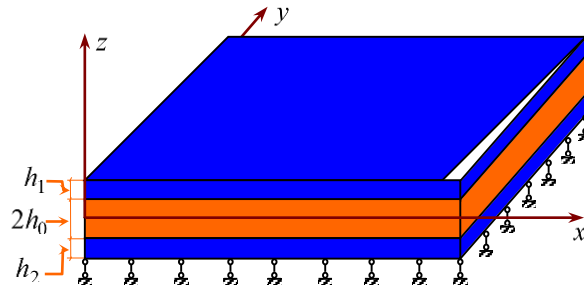


Рис. 1. Промоугольная шарнирно-опертая трехслойная пластинка

Учитывая ограниченность размеров пластины, в дальнейшем считается, что она находится в условиях плоской деформации (рис. 1). При этом ось Ox направлена вдоль средина поперечного сечения Oxz по его средней поверхности, а ось Oz – вверх. Слои пластинки пронумерованы как показано на рис.1, т.е. верхний несущий слой назван первым слоем, нижний несущий слой – вторым, и заполнитель – нулевым слоем. Пусть h_1 , $2h_0$ и h_2 толщины первого, нулевого и второго слоев; λ_m, μ_m – коэффициенты Ляме и ρ_m – объёмные плотности слоев ($m=0,1,2$). Зависимости напряжений $\sigma_{ij}^{(m)}$ от деформаций $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ в точках слоев пластинки описываются законом Гука. В этом случае уравнения движения точек слоев в декартовой системе координат значительно упрощаются введением функций $\varphi_m(x, z, t)$ и $\psi_m(x, z, t)$. Здесь φ_m и ψ_m потенциалы продольных и поперечных волн, соответственно. В случае плоской деформации, учитывая, что векторы перемещений точек слоев $\vec{U}^m = \vec{U}^m(U_m, W_m)$ разлагаются только по единичным ортам \vec{i}, \vec{k} уравнения движения приводятся к волновым уравнениям

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\rho_1}{\lambda_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \quad \Delta \psi_1 = \frac{\rho_1}{\mu_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (1)$$

где Δ – двумерный дифференциальный оператор Лапласа. При этом компоненты векторов перемещений, а также тензоров напряжений и деформаций слоев выражаются через введенные функции φ_m и ψ_m .

Предполагается, что при $t < 0$ пластинка находилась в покое, а в момент $t = 0$ к её граничным поверхностям прикладываются динамические воздействия. В силу линейности задачи можно представить поля смещений, в виде наложения симметричной и антисимметричной частей



$$\vec{U}_m = \vec{U}_m^s + \vec{U}_m^a,$$

где \vec{U}_m^s - симметричная (продольная), \vec{U}_m^a - антисимметричная (изгибная) части полей перемещений слоев пластины. При этом симметричные части должны удовлетворять граничным условиям при $z = (-1)^{i-1} h_i^*$, $h_i^* = h_0 + h_i$,

$$\sigma_{xz}^{(i)} = f_x^{(i)}; \sigma_{zz}^{(i)} = f_z^{(i)}; \quad (i=1,2). \quad (2)$$

Кроме того, на поверхностях заполнителя имеют места динамические и кинематические контактные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } z = h_0 \quad \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}, \quad U_0 = U_1, \quad W_0 = W_1; \\ \text{при } z = -h_0 \quad \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad U_0 = U_2, \quad W_0 = W_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия нулевые.

Метод решения. Для решения поставленной задачи необходимо задать выражения для функций $f_x^{(1,2)}(x,t)$ и $f_z^{(1,2)}(x,t)$ из граничных условий. Следуя [5], функции внешних воздействий представим в виде

$$\begin{aligned} f_x^{(1,2)}(x,t) = \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin kx} \left\{ dk \int_{(l)} \tilde{f}_x^{(1,2)}(k,p) e^{pt} dp, \right. \\ f_z^{(1,2)}(x,t) = \int_0^\infty \frac{\sin kx}{-\cos kx} \left\{ dk \int_{(l)} \tilde{f}_z^{(1,2)}(k,p) e^{pt} dp, \right. \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_x^{(1,2)}(k,p)$, $f_z^{(1,2)}(k,p)$ - функции, регулярные при $\text{Re } p \geq 0$, имеющие конечное число полюсов, принимающие произвольные значения внутри некоторой области $\Omega(k,p)$, содержащий промежуток $(-i\omega_0, i\omega_0)$ мнимой оси, убывающие при $p \rightarrow \mp i\infty$ не менее, чем $|p|^{-n_0}$, где $n_0 \gg 1$, и такие, что вне $\Omega(k,p)$ их значения пренебрежимо малы. Кроме того функции $\tilde{f}_x^{(1,2)}(k,p)$ и $\tilde{f}_z^{(1,2)}(k,p)$ - аналитические, принимающие произвольные значения в промежутки $(0, k_0)$, убывающие при $k \rightarrow \infty$, k^{-n_0} , и пренебрежимо малые при $k > k_0$; (l) - контур $\text{Re } p = \nu > 0$ на комплексной плоскости (p) , оставляющего область $\Omega(k,p)$ правее себя.

В соответствие с принятыми представлениями функций внешнего воздействия решение поставленной задачи также ищем в виде (4). Это позволяет получить из (1) обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. В случае антисимметричных воздействий, когда будут иметь место поперечные колебания пластины, решением полученных уравнений будет

$$\tilde{\varphi}_m(z, k, p) = A_m^{(2)}(k, p) \text{sh}(\alpha_m z); \quad \tilde{\psi}_m(z, k, p) = B_m^{(2)}(k, p) \text{ch}(\beta_m z), \quad (m = 0, 1, 2). \quad (5)$$

где

$$\alpha_m^2 = k^2 + p^2 / a_m^2; \quad \beta_m^2 = k^2 + p^2 / b_m^2.$$



Перемещения U_m и W_m также представим в виде (4) и подставляя вместе с (5) в выражения перемещений, для преобразованных \tilde{U}_m и \tilde{W}_m будем иметь выражения через гиперболические функции и постоянные интегрирования. Далее с использованием стандартных разложений гиперболических функций в степенные ряды, получим

$$\tilde{U}_m = \sum_{n=0}^{\infty} [k\alpha_m^{2n+1} \cdot A_m^{(2)} - \beta_m^{2n+2} B_m^{(2)}] \frac{z^{2n+1}}{(2n)!}; \quad \tilde{W}_m = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_m^{2n+1} \cdot A_m^{(2)} - k\beta_m^{2n} B_m^{(2)}] \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (6)$$

В качестве искомым функций в уравнениях колебания трехслойной пластинки примем главные части преобразованных перемещений \tilde{U}_0 и \tilde{W}_0 такой поверхности нулевого слоя, расстояние от поверхности $z = 0$ которой определяется формулой

$$\xi = \chi \cdot h_0 \quad -1 \leq \chi < 0; \quad 0 \leq \chi < 1$$

где χ - постоянное число, удовлетворяющее неравенству $-1 \leq \chi \leq 1$. Для этого в выражениях (6) примем $z = \xi$, $m = 0$ и $n = 0$. Тогда введя обозначения $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$ получим

$$\tilde{U}_0^{(0)} = [k\alpha_0 A_0^{(2)} - \beta_0^2 B_0^{(2)}] \xi, \quad \tilde{W}_0^{(0)} = \alpha_0 A_0^{(2)} - k B_0^{(2)}. \quad (7)$$

Решив систему относительно $\alpha_0 A_0^{(2)}$ и $B_0^{(2)}$, выразим их через $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$. Из контактных условий (3) находятся выражения для постоянных $A_m^{(1)}$ и $B_m^{(1)}$ при $m = 1, 2$. Затем они подставляются в граничные условия (2). Это позволяет получить уравнения антисимметричных колебаний трехслойной пластинки в следующем виде

$$A_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} \right] + B_1 [U_0^{(0)}] = S_1 [f_x^{(2)}],$$

$$A_2 [W_0^{(0)}] + B_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} \right] = S_2 [f_z^{(1)}], \quad (8)$$

где A_k, B_k, S_k - дифференциальные операторы одинаковой структуры, имеющие вид

$$D_k = D_{k1} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + D_{k2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + D_{k3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{k4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_{k5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{k6};$$

D_{kj} равны A_{kj}, B_{kj} или S_{kj} :

$$A_{11} = \frac{1}{2} \frac{1}{b_0^2 b_1^2} h_0^2 (1 - q_0)(1 - q_1)^2 + \frac{1}{6} \frac{1}{b_1^4} h_0^2 (1 - q_1)^2 + \frac{1}{12} \frac{1}{b_0^2 b_1^2} h_0^4 (1 - q_0)(1 - q_1)^2 + \frac{1}{6} \frac{1}{a_1^2 b_1^2} (h_0 + h_1)^2 (1 - q_1)^2;$$

$$B_{21} = \frac{1}{12} \frac{1}{a_2^2 b_2^2} h_0^2 (h_0 + h_2)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{b_0^2 b_2^2} h_0^2 (h_0 + h_2)^2 (1 - q_0) q_2 + \frac{1}{4} \frac{1}{b_0^2 b_2^2} h_0^2 (h_0 + h_2)^2 (1 - q_0)(1 - q_2) -$$

$$- \frac{1}{12} \frac{1}{b_0^2 b_2^2} h_0^2 (h_0 + h_2)^2 (1 - q_0) + \frac{1}{6} \frac{1}{b_0^2 b_2^2} h_0^4 (1 - q_0);$$



$$S_{i1} = \xi \mu_i^{-1} \frac{1}{a_i^2 b_i^2} \frac{h_0^4}{12}; \dots S_{i6} = \xi \mu_i^{-1},$$

где $(i=1,2)$; $z_1 = h_0 + h_1$; $z_2 = h_0 + h_2$; $q_m = 1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}$; a_m, b_m - соответственно скорости продольных и поперечных волн в материале пластинки. При этом перемещения точек пластинки определяются по формулам

для срединного слоя

$$U_0 = \left\{ -\frac{z^3}{6l^3} q_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} + \frac{1}{\xi} \left[\frac{z^2}{6l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{z^2}{6l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (1+q_0) + 1 \right] U_0^{(0)} \right\}$$

$$W_0 = \left\{ \left[\frac{b_0^2 z^4}{24l^4 a_0^2} (1-q_0) \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{z^4}{24l^4} \left(1-2q_0 + \frac{b_0^2}{a_0^2} (1-q_0) \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{z^4}{24l^4} (1-2q_0) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \right. \right. \tag{9}$$

$$\left. \left. + \frac{z^2}{2l^2} (1-q_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{z^2}{2l^2} (1-q_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right] W_0^{(0)} - \frac{1}{\xi} \left[\frac{z^2}{24l^2} q_0 \left(1 + \frac{b_0^2}{a_0^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{z^2}{12l^2} q_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} q_0 \right] \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} \right\}$$

Для верхнего и нижнего слоев

Результаты расчетов. Рассмотрим частную задачу о симметричных колебаниях

шарнирно - опертой в краях в продольном направлении пластины, при $x=0$ и $x=l$, где l - длина пластинки в направлении оси Ox . В качестве уравнений колебания примем систему (8). Граничные условия задачи имеют вид

$$W_0^{(0)} = 0; \frac{\partial^2 W_0^{(0)}}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial U_0^{(0)}}{\partial x} = 0; \frac{\partial^3 U_0^{(0)}}{\partial x^3} = 0.$$

Начальные условия считаются нулевыми.

Решение системы уравнений (8), удовлетворяющее условиям закрепления торцов, а также функции внешних воздействий представим в виде

$$U_0^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} u(t) \cos \frac{k\pi x}{l}; W_0^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} w(t) \sin \frac{k\pi x}{l}; f_x = \sum_{m=1}^{\infty} f_{xm}(t) \cos \frac{k\pi x}{l}; f_z = \sum_{m=1}^{\infty} f_{zm}(t) \sin \frac{k\pi x}{l}; \tag{10}$$

Подстановка (10) в (8) приводит к системе двух дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций $u(t)$ и $w(t)$.

В результате, для выбранного варианта граничные условие получено две нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающие нелинейные колебания трехслойной пластины под действием внешней нагрузки, приложений по ист торцам, изменяющиеся по гармоническому закону и равномерно распределенной по толщина пластины:

Задача решена численно при следующих значениях физико-механических и геометрических параметров трехслойной пластинки: $\xi = 0.9h_0$; $l = 0.4m$; $h_0 = 0.04m$; $h_1 = 0.001m$; $h_2 = 0.001m$; $\rho_0 = 30kg/m^3$; $\rho_1 = 2700kg/m^3$; $\rho_2 = 2700kg/m^3$; $E_0 = 0.165 \cdot 10^9 Pa$; $E_1 = 69 \cdot 10^9 Pa$; $E_2 = 69 \cdot 10^9 Pa$; $\nu_0 = 0.03125$; $\nu_1 = 0.33$; $\nu_2 = 0.33$; $f_{xm}(t) = t^2$; $f_{zm}(t) = 3t^2$. Результаты представлены на рис.2-5 в виде графиков продольного и поперечного

перемещений точек срединного слоя и нормальных напряжений в различных его сечениях.

Выводы. Из представленных графиков на рис. 2-3 следует, что продольное перемещение точек различных сечений достигают своего максимума при значениях между 0,6 и 0,8 безразмерного времени. Отрицательные значения продольного перемещения указывает на то, что пластинка за вес период действия внешней нагрузки испытывает сжатие. Поперечное перемещение точек сечений имеет синусоидальный характер зависимости от времени. При этом оно достигает своего максимума при значении безразмерного времени близкой к 0,4. Максимальному значению

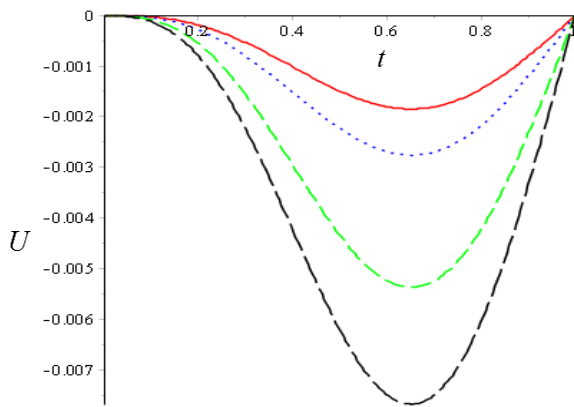


Рис. 2. Зависимость перемещения U от времени при $x = 0.2$ (—); 0.3 (····); 0.4 (---); 0.6(—·—).

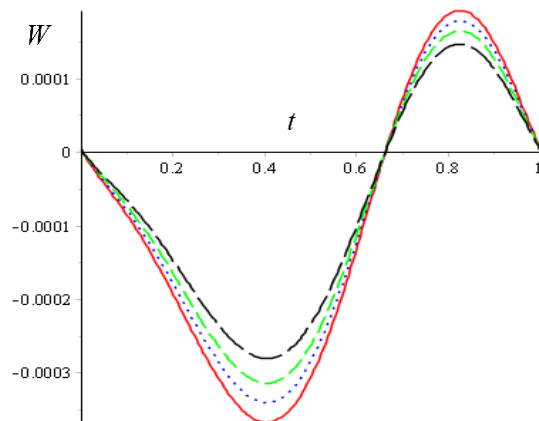


Рис. 3. Зависимость перемещения W от времени при $x = 0.2$ (—); 0.3 (····); 0.4 (---); 0.6(—·—).

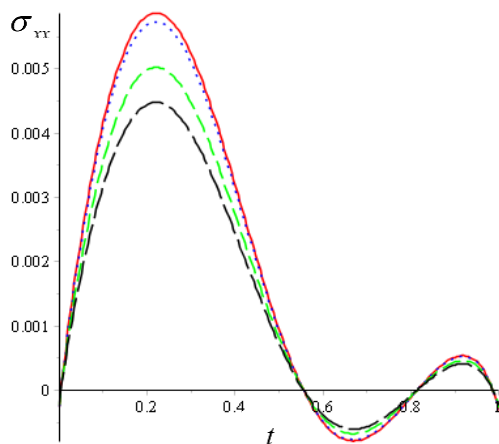


Рис. 4. Зависимость напряжения σ_{xx} от времени при $x = 0.2$ (—); 0.3 (····); 0.4 (---); 0.6(—·—).

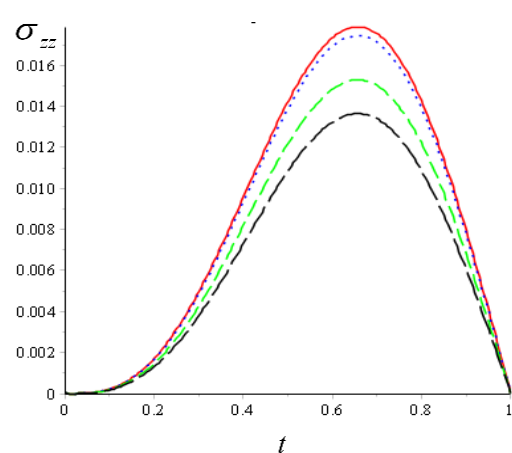


Рис. 5. Зависимость напряжения σ_{zz} от времени при $x = 0.2$ (—); 0.3 (····); 0.4 (---); 0.6(—·—).

продольного перемещения соответствует нулевое значение поперечного перемещения. Кроме того, в начале процесса и далее до значения времени 0,63-0,66 поперечное перемещение отрицательное, а при $0,65 < t < 0,7$. В дальнейшем оно остается положительным имея относительный максимум в точке 0,82.

Графики напряжений (рис.4-5) хорошо согласуются с зависимостями перемещений, имея относительные максимумы в точках, где перемещения



минимальны. В точках максимальных значений перемещений соответствующие напряжения минимальны.

References:

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек// Итоги науки и техники. Сер. Механика деформ. твердых тел. – Т. 5 – М.: ВИНТИ, 1973. – 272с.
2. Худойназаров Х. Х. Нестационарное взаимодействие цилиндрических оболочек и стержней с деформируемой средой.- Т. Изд-во мед.лит. имени Абу Али Ибн Сина, 2003, 325 стр.
3. Александров А.Я., Куршин Л.М. Трехслойные пластинки и оболочки//Прочность, устойчивость, колебания. – М.: Машиностроение, 1968, т.2.- С.245-308.
4. Петрашень Г.И. Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем//Исс-я упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1966 - №5. – С. 3-33.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука, Главная ред. физ.-матем. лит-ры, 1967, 268 с.
6. Chu H.N. Influence of transverse shear on nonlinear vibrations of sandwich beams with honeycomb cores // J. Aeronaut. Sci., 1961, v.28, p. 405-410; comment: ibid., 1962, v. 29, № 7, p. 886-888.
7. Yu Y.Y. Nonlinear flexural vibrations of sandwich plates // J. Acoust. Soc. America, 1962, v.34, № 9, part 1, p. 1176 – 1183.
8. Yu Yi-Yuan, Lai Jai-Liec. Influence of transverse shear and edge condition on nonlinear vibration and dynamic buckling of homogeneous and sandwich plates // Trans. ASME, 1966, v. E33, № 4, p. 934-936. Русск. перевод: Ю. И-юань, Лай Чже-лю. Влияние поперечного сдвига и граничных условий на нелинейные колебания и динамическую устойчивость однородных и многослойных пластин // Прикл. механика, сер. Е, 1966, т. 33, № 4, С. 242-244.
9. Петрашень Г.И., Хинен Э.В. Об инженерных уравнениях колебаний неидеально-упругих пластин // Труды МИАН. Т. 95. – Л.: Наука, 1968. – С. 151 – 183.
10. Филиппов И.Г. Уточнение дифференциальных уравнений колебания вязкоупругих пластин и стержней //Прикл.мех. – 1986. – 22, №2. – С. 71-78.
11. Мирзакобилов Н.Х. Колебания трехслойных пластин частного вида// Дисс. на соис. уч. ст. канд. наук.- Москва, 1992 г.,- 139 с.
12. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней.-Кишинев: «Штиинца», 1988.- 188 с.
13. Худойназаров Х.Х., Филиппов И.Г. Уточнение дифференциальных уравнений продольно – радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки //Прикл. мех. – 1990. – 26, №2. – С. 63 – 71.
14. Худойназаров Х., Яхшибоев Ш.Р. Поперечные гармонические колебания трехслойной пластинки// Проб. Архит. и строит. 2020. №2.– С. 151-156.
15. Х.Худойназаров, В.А.Скрипняк, Ш.Р.Яхшибоев Нестационарные поперечные колебания трехслойной вязкоупругой пластинки // Проблемы механики АН РУз 2018. Вып. 2. С. 27 – 32.



16. Kh Khudoynazarov and Sh.R Yaxshiboyev 2020 The Mathematical Model of Transverse Vibrations of the Three-Layer Plate. IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 614 012062. DOI: 10.1088/1755-1315/614/1/012062.

17. Yaxshiboyev Sh. R. Chetlari sharnirli mahkamlangan elastik plastinkaning antisimmetrik tebranishlari// Me'morchilik va qurilish muammolari. 2020. №1.2-qism – C.106-109.