



TUWINDI HÁM INTEGRALDÍŇ BAZIBIR QOLLANIWLARI

¹M.A.Asqarov

Fizika-matematika ilimlari kandidanti, docent,

²J.T.Daurxanov

Magistrant,

Nókis mámleketlik pedagogikalıq institute,

³G.T.Gubanova

Assistent,

Qaraqalpaq awıl xojalıǵı hám agrotexnologiyalar institute.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7565091>

ARTICLE INFO

Received: 14th January 2023

Accepted: 23th January 2023

Online: 24th January 2023

KEY WORDS

Elementar maseleler, funkciya tuwindısı, integral, teńleme.

ABSTRACT

Maqalada integral túsiniǵiniń ózgeshe qollanıwları kórsetilgen. Anıq emes hám anıq integraldın qásiyetlerinen paydalanıp algebranıń elementar máseleleri ańsat sheshilgen.

Kópshilik ádettegi elementar máselelerdi tuwindı hám integral túsiniǵi járdeminde tez hám ańsat sheshiwge boladı. Mektep sabaqlıqları hám oqıw qollanbalarında bul máselege az dıqqat bólinedi. Matematikalıq analizdiń elementlerin ózgeshe paydalanıw úyrenilip atırǵan teoriyanıń tiykarǵı túsiniǵilerin tereń ózlestiriliwine imkaniyat jaratadı.

Funkciya tuwindısı hám integralınan paydalanıp ayırım elementar máselelerdiń sheshiliwin qarap ótemiz.

1-qásiyet. Eger f funkciyası bazıbir aralıqta ósiwshi yamasa kemiwshi bolsa, onda bul aralıqta $f(x)=0$ teńlemesi birden artıq emes túbirge iye boladı.

2-qásiyet. Eger f funkciyası $[a,b]$ aralıǵında anıqlanǵan hám úzliksiz bolıp onıń ushlarında hár qıylı belgilerge iye bolsa, onda a hám b arasında $f(c)=0$ bolatuǵın c noqat tabıladı.

1-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń.

$$\begin{cases} x^2y + 2y^2x + y^3 = 9 \\ x^3y - y^4 = 7 \end{cases}$$

Sheshiw. Sistemanı túrlendiremiz:

$$\begin{cases} y(x + y)^2 = 9 \\ y(x^3 - y^3) = 7 \end{cases}$$

Birinshi teńlemeden $y > 0$, al ekinshiden $x > y > 0$ kelip shıǵadı. Birinshi teńlemede x ti y

arqalı ańlatamız: $\sqrt{y}(x + y) = 3$, $x = \frac{3}{\sqrt{y}} - y$. Bul jaǵdayda $y\left(\left(\frac{3}{\sqrt{y}-y}\right)^3 - y^3\right) = 7$. Belgiley

$t = \sqrt{y}$ arqalı $t^2\left(\left(\frac{3}{t} - t^2\right)^3 - t^6\right) = 7$ yamasa $(3 - t^3)^3 - t^9 - 7t = 0$ iye bolamız. $f(t)$ belgilew

kiritsek $f(t) = (3 - t^3)^3 - t^9 - 7t$ funkciya tuwindısı $f'(t) = -9t^2(3 - t^3)^2 - 9t^8 - 7$ ge teń boladı. Ol t niń barlıq mánislerinde teris boladı. Solay etip, f funkciya kemiwshi boladı. Sonlıqtan



$f(t) = 0$ teñleme birden artıq emes túbirge iye boladı. Teñleme túbiri $t = 1$ boladı. Demek, $x = 2, y = 1$ sistemaniń jalǵız sheshimi.

2-mısal. $\frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1} = t$ teñleme $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ aralıqta jatiwshı jalǵız túbirge iye bolatuǵının dáliyleń.

Sheshiw. Teñlemeni teńkúshli túrlendiriwler arqalı $f(t) = 0$, bunda $f(t) = t^3 + 2t - 1$ túрге keltiriledi.

Funkciya f ósiwshi, sebebi qálegen $t \in R$ ushın $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$.

1-qásiyetke baylanıslı teñleme birden artıq emes sheshimge iye. f funkciyası úzliksiz, sonıń

menen birge, $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{27} < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$. 2-qásiyet boyınsha teñleme $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ aralıqta túbirge iye.

3-mısal. $F(x) = \sin 3x \cdot \cos^3 x + \cos 3x \cdot \sin^3 x$ funkciyasın ápiwayılastırıń.

Sheshiw. Trigonometryaniń belgili formulalarınan paydalanıp ápiwayılastırıw júdá quramalı túrlendiriwlerge alıp keliwi múmkin.

Funkciyadan tuwındı alıp tómendegige iye bolamız.

$$F'(x) = f'(x) = 3 \cos 3x \cos^3 x - 3 \sin 3x \cos^2 x \cdot \sin x - 3 \sin 3x \cdot \sin^3 x + 3 \cos 3x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = 3 \cos 3x \cdot \cos x - 3 \sin 3x \cdot \sin x$$

bunnan,

$$f(x) = 3 \cos(3x + x) = 3 \cos 4x$$

Bul jaǵdayda

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 3 \cos 4x dx,$$

$$F(x) = \frac{3}{4} \sin 4x + C,$$

bunda C – bazı bir turaqlı san. C – nı tabamız: $C = F(0) = 0$. Solay etip,

$$F(x) = \frac{3}{4} \sin 4x,$$

yamasa

$$\sin 3x \cdot \cos^3 x + \cos 3x \cdot \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$$

4-mısal. Kópáǵzalını ápiwayılastırıń:

$$F(x) = (x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3$$

Sheshiw. Izbe-iz tuwındı alıp tómendegige iye bolamız:

$$f(x) = F'(x) = 3(x+a+b)^2 - 3(x+a-b)^2 - 3(x-a+b)^2 + 3(-x+a+b)^2,$$

$$\varphi(x) = f'(x) = 6(x+a+b) - 6(x+a-b) - 6(x-a+b) - 6(-x+a+b)$$

Bunnan $\varphi(x) = 0$ ekenligi anıq. Sonlıqtan



$$f(x) = \int \varphi(x) dx = \int 0 \cdot dx = C_1,$$

Ya'g'niy $f(x) = C_1$, bunda C_1 - const.

$$C_1 = f(0) = 3(a+b)^2 - 3(a-b)^2 - 3(-a+b)^2 + 3(a+b)^2 = 6(a+b)^2 - 6(a-b)^2 = 24ab, f(x) = 24ab$$

Solay etip,

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 24ab dx = 24abx + C,$$

$$C = F(0) = (a+b)^3 - (a-b)^3 - (-a+b)^3 - (a+b)^3 = 0$$

demek,

$$F(x) = 24abx$$

5-misol. Hár bir n natural san ushin $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}$ teńsizlikti dáliyleń.

Sheshiw. Teńsizliktiń sol tárepin $n > 1$ bolǵanda tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3}(2-1) + \frac{1}{3^3}(3-2) + \dots + \frac{1}{n^3}(n-(n-1)) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3}(k-(k-1))$$

$[1, n]$ kesindide $f(x) = \frac{1}{x^3}$ funkciyani qaraymız. Bul kesindi $x_k = k, k = 1, 2, \dots, n$ noqatları arqalı

uzınlıǵı 1 ge teń bolǵan n teń bólekke bólinedi. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3}(k-(k-1))$ ańlatpası ultanı $[k-1; k]$

kesindiler, al biyikligi $f(x_k) = f(k) = \frac{1}{k^3}$ ke teń bolǵan tuwrımúyeshlikler maydanlarınıń

qosındısına teń boladı. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ funkciya

$x > 0$ bolǵanda oń mánisli, úzliksiz hám kemiwshi boladı. Sonlıqtan anıq integral

anıqlamasındaǵı $\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) < \int_a^b f(x) dx < \sum_{k=2}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$ teńsizlikten

paydalanıwǵa boladı. Ya'g'niy $1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3}(k-(k-1)) < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^3} = 1 - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{3}{2}$

Demek $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3}(k-(k-1)) < \frac{3}{2}$

$n = 1$ bolǵanda teńsizlik ornli ekeni kórinip tur.

References:

1. М.Асқаров. Б.Пренов, У.Раметов. Математикалық анализ. Лекция конспектleri. 2-курслар ушын. Нөкис-2002 ж.



2. A. U. Abduhamidov, H. A. Nasimov, U. Nosirov, J. H. Husanov Algebra va matematik analiz asoslari, I. II qism Akademik litseylar uchun darslik 7- nashri T.-2008 j.

3. Asqarov M., Yeshanov M., Madireymov I. Algebra hám matematikalıq analiz tiykarları páninen máseleler hám shınıǵıwlar toplamı. Oqıwlıq qollanba. Nókis-2001j. (74 bet)