



## СОВМЕСТНОЕ ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КРАЙНИХ ЛЕВЫХ И КРАЙНИХ ПРАВЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

<sup>1</sup>Хамдамов И.М.,

<sup>2</sup>Маматов Х.М.

Университет общественной безопасности Республики Узбекистан  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.7540345>

### ARTICLE INFO

Received: 04<sup>th</sup> January 2023

Accepted: 14<sup>th</sup> January 2023

Online: 16<sup>th</sup> January 2023

### KEY WORDS

### ABSTRACT

*Д.З. Аровом и А.А. Бобровым в [1] были проведены исследования по вычислениям совместного асимптотического распределения экстремальных порядковых статистик в случае, когда исходное распределение принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем меньше единицы.*

Д.З. Аровом и А.А. Бобровым в [1] были проведены исследования по вычислениям совместного асимптотического распределения экстремальных порядковых статистик в случае, когда исходное распределение принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем меньше единицы. Полученные ими результаты показывают, что экстремальные члены вариационного ряда оказывают существенное влияние на асимптотическое поведение сумм случайных величин (с.в.), точнее, ими было установлено, что предельное распределение нормированной суммы без экстремальных слагаемых по модулю представляет собой смесь безгранично делимых законов. Позднее эти результаты J.L. Teugels в [2] перенес на случай показателей устойчивого закона в пределах между единицей и двойкой.

В настоящей работе полученные результаты в [1] и [2] (см. также [3]) переносятся на случай, когда вариационный ряд строится без модуля, и показано, что  $m$  крайних левых и  $k$  крайних правых порядковых статистик асимптотически независимы.

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – последовательность независимых (н.з.) одинаково распределенных с.в., заданных на одном и том же вероятностном пространстве с общей функцией распределения (ф.р.)  $F(x)$ .

Пусть, далее,  $X_n^{(1)} \leq X_n^{(2)} \leq \dots \leq X_n^{(n)}$  – вариационный ряд, построенный в порядке возрастания для выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Результаты упорядочения по абсолютной величине обозначим следующим образом:

$$\left| \overline{X}_n^{(1)} \right| \leq \left| \overline{X}_n^{(2)} \right| \leq \dots \leq \left| \overline{X}_n^{(n)} \right|$$



Наборы  $(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)})$  и  $(\bar{X}_n^{(1)}, \bar{X}_n^{(2)}, \dots, \bar{X}_n^{(k)})$  существенно отличаются друг от друга. Как замечено в доказательстве леммы 2.1.1 в [4], они могут совпадать лишь в случае симметричного распределения с вероятностью  $1/2^k$ .

Обозначим через  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  сумму с.в. и положим  $\bar{S}_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n-k} \bar{X}_n^{(j)}$ ,  $S_n^{(m,k)} = \sum_{j=m+1}^{n-k} X_n^{(j)}$ .

Легко заметить, что  $\bar{S}_n^{(k)}$  является результатом удаления  $k$  наибольших по абсолютной величине слагаемых из суммы  $S_n$ , тогда как  $S_n^{(m,k)}$  получается при одновременном удалении  $m$  крайних левых и  $k$  крайних правых порядковых статистик.

Предположим, что распределение  $X_1$  принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем  $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ , и пусть

$$P(X_1 < u) = F(u) = \begin{cases} c_1 |u|^{-\alpha} l_1(|u|), & \text{если } u < 0, \\ 1 - c_2 u^{-\alpha} l_2(u), & \text{если } u > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  – положительные постоянные, такие, что  $c_1 + c_2 = 1$ , а  $l_i(u)$ ,  $i = 1, 2$ , – медленно меняющиеся функции (м.м.ф.) в смысле Карамата (см. [5]), причем  $\lim_{u \rightarrow \infty} l_1(u)/l_2(u) = 1$ .

Из интегрального представления м.м.ф. (см., например, гл. XIII в [5]) имеем

$$l_i(x) = a_i(x) \exp\left(\int_1^x \frac{\varepsilon_i(u)}{u} du\right), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_i(x) = a_0 > 0$ ,  $\varepsilon_i(x)$ ,  $i = 1, 2$  – абсолютно интегрируемая функция в любом конечном интервале  $(x', x'') \subset (0, \infty)$ , а  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Как замечено в [6] (см. замечание 1.4.1 и 1.4.2), случаи  $\alpha = 1, 2$  технически сложны, поэтому мы ограничимся только рассмотрением случая  $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ .

Кроме того, в случае  $1 < \alpha < 2$  положим  $EX_1 = 0$ .

Далее, введем обозначение

$$b_n = \inf \{t : nP(|X_1| > t) \leq 1\} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$



Тогда случайная величина  $b_n^{-1}S_n$  будет сходиться по распределению к случайной величине, имеющей устойчивый закон, логарифм характеристической функции (х.ф.) которой имеет следующий вид (см., например, лемму 2 [2]):

$$\log \varphi(t) = \begin{cases} \alpha c_1 \int_{-\infty}^0 \frac{e^{itz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ \alpha c_1 \int_{-\infty}^0 \frac{e^{itz} - 1 - itz}{|z|^{\alpha+1}} dz + \alpha c_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 1 < \alpha < 2, \end{cases}$$

В дальнейшем  $\theta$  всюду будет обозначать постоянное число из  $[-1,1]$ , а  $c$  – положительную константу, значение которой может быть различным в разных местах, так что возможна запись

$$c + c = c, \quad c^2 = c.$$

Пусть  $\delta > 0$  – произвольное положительное число,

$$u_0 = u_0(n, \delta) = -\delta b_n, \quad v_0 = v_0(n, \delta) = \delta b_n.$$

Тогда для некоторого  $\Delta > 0$  имеем  $u_j = u_{j-1} - \Delta, \quad v_j = v_{j-1} + \Delta, \quad j = 1, 2, \dots$

**Теорема 1.** Если выполнены условия (1)-(3), то

$$\limsup_{\Delta \rightarrow 0} P \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n I_{(u_j, u_{j-1})}(X_i) > 1 \right\} \right) \leq c_1(n, \delta) \omega_1(n, \delta),$$

$$\limsup_{\Delta \rightarrow 0} P \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n I_{(v_j, v_{j-1})}(X_i) > 1 \right\} \right) \leq c_2(n, \delta) \omega_2(n, \delta),$$

где

$$I_{(a,b)}(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \in (a,b), \\ 0, & \text{если } X \notin (a,b), \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_i(n, \delta) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall \delta > 0,$$

$$c_1(n, \delta) = \sup_{m \geq n} m^2 F^2(-\delta b_m), \quad c_2(n, \delta) = \sup_{m \geq n} m^2 (1 - F(\delta b_m))^2.$$

Пусть  $a_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) – ограниченная функция, которая определяется из (2)

(представление Карамата медленно меняющейся функции  $l_i(x)$ , определяющее асимптотику хвостов распределения  $F(-x), 1 - F(x), x > 0$ ). Положим

$$\bar{a}_i(u) = \inf_{x \geq u} a_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда и из (2), если положим

$$\omega_i(n, \delta) = \sup_{u \geq \delta b_n} \left( 1 - \frac{\bar{a}_i(u)}{a_i(u)} \right), \quad i = 1, 2,$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_i(n, \delta) = 0, i = 1, 2, \forall \delta > 0$$

то отсюда будет следовать, что

**Замечание.** Если выполнено условие (1), то из (2) следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_i(n, \delta) = c_i^2 \delta^{-2\alpha}, i = 1, 2. \tag{4}$$

**Доказательство теоремы 1.** Докажем первое утверждение.

Положим

$$P_n(\Delta) = P\left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n I_{(u_j, u_{j-1})}(X_i) > 1 \right\} \right\}, \quad \pi_{j,n}(\Delta) = P\left\{ \sum_{i=1}^n I_{(u_j, u_{j-1})}(X_i) > 1 \right\}.$$

Согласно определению,  $P_n(\Delta)$  – это вероятность того, что в один из отрезков  $[u_j, u_{j-1})$  попадут, по крайней мере, две из случайных величин  $X_l, l = 1, 2, \dots, n$ . Отсюда следует, что

$$P_n(\Delta) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j,n}(\Delta) \tag{5}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \pi_{j,n}(\Delta) &= \sum_{k=2}^n C_n^k (F(u_{j-1}) - F(u_j))^k (1 - F(u_{j-1}) + F(u_j))^{n-k} \leq \frac{n(n-1)}{2} \times \\ &\times (F(u_{j-1}) - F(u_j))^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} (F(u_{j-1}) - F(u_j))^{k-2} \times \\ &\times (1 - F(u_{j-1}) + F(u_j))^{n-k} \leq n^2 (F(u_{j-1}) - F(u_j))^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} (F(u_{j-1}) - F(u_j))^{k-2} \times \\ &\times (1 - F(u_{j-1}) + F(u_j))^{n-k} = n^2 (F(u_{j-1}) - F(u_j))^2 \leq n^2 (F(u_{j-1}) - F(u_j)) \times \\ &\times \sup_{l \geq 1} (F(u_{l-1}) - F(u_l)) \leq n^2 F(u_0) (F(u_{j-1}) - F(u_j)) \sup_{l \geq 1} \left( 1 - \frac{F(u_l)}{F(u_{l-1})} \right) \leq \\ &\leq n^2 F(u_0) (F(u_{j-1}) - F(u_j)) \sup_{u \leq u_0} \left( 1 - \frac{F(u - \Delta)}{F(u)} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

и, согласно (1),

$$\frac{F(u - \Delta)}{F(u)} = \left( 1 + \frac{\Delta}{|u|} \right)^{-\alpha} \frac{l_1(|u - \Delta|)}{l_1(|u|)}$$

Из ограниченности  $\Delta$  следует существование некоторой  $c > 0$  такой, что

$$\left( 1 + \frac{\Delta}{|u|} \right)^{-\alpha} \geq 1 - c \frac{\Delta}{|u|}$$

при любом  $u \leq u_0$ .



Из (2) для достаточно большого  $n$  при  $u \leq u_0$  следует выполнение неравенства

$$\int_{|u|}^{|u-\Delta|} \frac{\varepsilon(v)}{v} dv \geq -\frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\Delta}{|u|} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{F(u-\Delta)}{F(u)} \geq \left( 1 - c \frac{\Delta}{|u|} \right) \left( 1 + c \frac{\Delta}{|u|} \right)^{-1/2} \frac{a_1(|u-\Delta|)}{a_1(|u|)} \geq \left( 1 - c \frac{\Delta}{|u|} \right) \frac{a_1(|u-\Delta|)}{a_1(|u|)}. \quad (7)$$

Таким образом, объединяя (4) – (7), получим

$$P_n(\Delta) \leq n^2 F^2(u_0) \sup_{u \leq u_0} \left( 1 - \left( 1 - c \frac{\Delta}{|u|} \right) \frac{a_1(|u-\Delta|)}{a_1(|u|)} \right).$$

$$\bar{a}_1(x) = \inf_{y \geq x} a_1(y)$$

Учитывая, что , из последнего соотношения имеем

$$\limsup_{\Delta \rightarrow 0} P_n(\Delta) \leq n^2 F^2(u_0) \sup_{u \leq u_0} \left( 1 - \frac{\bar{a}_1(|u|)}{a_1(|u|)} \right) \leq c_1(n, \delta) \omega_1(n, \delta)$$

Первое утверждение теоремы 1 доказано. Второе доказывается аналогично.

Теорема 1 доказана.

Обозначим

$$\Upsilon_n^- = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n I_{\{u_j, u_{j-1}\}}(X_i) \leq 1 \right\}, \quad \Upsilon_n^+ = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n I_{\{v_{j-1}, v_j\}}(X_i) \leq 1 \right\}.$$

Пусть

$$\Upsilon_n = \Upsilon_n^+ \cap \Upsilon_n^-.$$

Тогда из теоремы 1 легко следует, что

$$P(\Upsilon_n) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Последние соотношение показывает справедливость следующей основной теоремы.

**Теорема 2.** Если условия (1)-(3) выполнены, то

$$P(-X_n^{(m)} < ub_n, X_n^{(n-k+1)} < vb_n) = G_m^{(1)}(u)G_k^{(2)}(v) + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно по  $u, v \geq 0$ .

**Доказательство.** Из теоремы 1 нетрудно убедиться в том, что

$$P(X_n^{(m)} < -ub_n, X_n^{(n-k+1)} > vb_n) = P(X_n^{(m)} < -ub_n, X_n^{(n-k+1)} > vb_n, \Upsilon_n) + \theta(\omega_1(n, u) + \omega_2(n, v)),$$

для любого  $u > 0, v > 0$ . Непосредственные вычисления позволяют убедиться в справедливости равенства

$$P(X_n^{(m)} < -ub_n, X_n^{(n-k+1)} > vb_n)$$



$$= C_n^{(m,k)} \int_{-\infty}^{-ub_n} \int_{vb_n}^{\infty} F^{m-1}(z) (F(w) - F(z))^{n-m-k} (1 - F(w))^{k-1} dF(z) dF(w) =$$

$$= C_n^{(m,k)} \int_{-\infty}^{-u} \int_v^{\infty} F^{m-1}(zb_n) (F(wb_n) - F(zb_n))^{n-m-k} (1 - F(wb_n))^{k-1} dF(zb_n) dF(wb_n),$$

где  $C_n^{(m,k)} = n! / ((m-1)!(k-1)!(n-m)!)$ . Из условия (1) следует, что

$$n \int g(u) dF(ub_n) \rightarrow \alpha \int g(u) \left( I_{(-\infty,0)}(u) c_1 |u|^{-\alpha-1} + I_{(0,\infty)}(u) c_2 u^{-\alpha-1} \right) du$$

для любой непрерывной функции  $g(u)$  с компактным носителем, лежащем в  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . В частности,

$$nF(zb_n) \rightarrow c_1 (-z)^{-\alpha}$$

для  $z < 0$ . Аналогично, для  $w > 0$

$$n(1 - F(wb_n)) \rightarrow c_2 w^{-\alpha},$$

следовательно,

$$(F(wb_n) - F(zb_n))^{n-m-k} \rightarrow e^{-c_1 (-z)^{-\alpha} - c_2 w^{-\alpha}}.$$

Из последнего соотношения следует доказательство теорема 2.

Полученные результаты в настоящей работе могут быть использованы для дальнейшего развития теории порядковых статистик, связанной с характеристической функцией усеченной суммы, в частности, устанавливают связи между экстремальными членами порядковых статистик и суммами независимых случайных величин в случае, когда распределения слагаемых принадлежат к области притяжения устойчивых законов.

### References:

1. Аров Д.З., Бобров А.А., О крайних членах вариационного ряда и их роли в сумме независимых величин, Теор.вероятн. и ее примен., 1960, Т.5, №4, С.415-435.
2. Teugels J.L., Limit theorems on order statistics, Ann.Probab., 1981, v. 9, No 5, pp.868-880.
3. Нагаев А.В., Хамдамов И.М., О роли экстремальных слагаемых в сумме случайных величин, Теор.вероятн. и ее примен., 2002г., том 47, выпуск 3, с. 575-583.
4. Гафуров М.У., Хамдамов И.М., Роль экстремальных порядковых статистик в образовании большого уклонения сумм независимых случайных величин, Асимптотические методы математической статистики., Ташкент, Фан, 1987г., стр. 38-46.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 144с.
6. Хамдамов И.М., Асимптотический анализ экстремальных значений выборки и предельные теоремы для функционалов от выпуклых оболочек., Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. (DSc), Ташкент, 2021, 183с.