



## АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЕ ШПИНДЕЛЕЙ ТОКАРНЫХ СТАНКОВ

Аликулов Джавлон Эргашевич<sup>1</sup>

Иброхимов Бобуржон Равшанбек угли<sup>2</sup>

Бигбутаев Жамшид Назарбоевич<sup>3</sup>

Мирахмедов Шукурулло<sup>4</sup>

<sup>1</sup>профессор Ташкентского

Государственного Технического Университета имени Ислама Каримова,

<sup>2</sup>ассистент Ташкентского

Государственного Технического Университета имени Ислама Каримова,

<sup>3</sup>ассистент Ташкентского

Государственного Технического Университета имени Ислама Каримова,

<sup>4</sup>магистрант Ташкентского

Государственного Технического Университета имени Ислама Каримова,

E-mail: [ibrohimov.2017@list.ru](mailto:ibrohimov.2017@list.ru)

<https://doi.org/10.5281/zenodo.6480950>

### ИСТОРИЯ СТАТЬИ

Принято: 15 апреля 2022 г.

Утверждено: 20 апреля 2022 г.

Опубликовано: 23 апреля 2022 г.

### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

шпиндель,  
демпфирования,  
жесткость, подшипник  
и вибрация

### АННОТАЦИЯ

*В данной работе представлен метод анализа для прогнозирования статического и динамического поведения шпиндельных систем станков. Математическая модель сформулирована с использованием метода конечных разностей, а для решения уравнений модели используется аналоговый компьютер общего назначения. Конкретное применение иллюстрируется на примере шпинделя токарного станка. При анализе поведения шпинделя обсуждается влияние жесткости подшипника, положения подшипника, демпфирования и наличия заготовки. Использование этого подхода в процессе проектирования иллюстрируется оптимизирующей переработкой существующего шпинделя.*

### Введение

Шпиндель является основным элементом станков. Характеристики обработки данного инструмента могут во многом определяться статическим и особенно динамическим поведением его шпинделя. Например, в токарных станках на стадии проектирования всегда желательно минимизировать статический прогиб конца шпинделя.

Поэтому для конструктора станков представляет особый интерес разработка эффективного и экономичного метода оценки заданной конструкции шпинделя и улучшения заданной конструкции путем изменения различных параметров, таких как поперечный момент, масса, жесткость подшипника и демпфирование.



По экономическим причинам обычно нежелательно, если вообще возможно, исследовать влияние многих переменных на статический прогиб и вибрационные характеристики путем измерений на масштабных моделях или на реальных машинах. Поэтому для разработки оптимальной конструкции конструктор полагается на вычислительные методы. Механика расчета кривой статического прогиба неоднородных валов хорошо известна, но для сложных конфигураций валов требует значительных усилий. Этот тип вычислительных задач часто хорошо подходит для решения с помощью цифрового компьютера.

Математика для расчета колебаний балки разрабатывалась в течение многих лет. Широко используются методы Бернуллы, Фурье, Лапласа и различные комбинации, такие как метод Миндлина-Гудмана [1]. Энергетические методы, которые доступны для расчетов, обычно применяются для незатухающих свободных колебаний массового упругого элемента и дают первую резонансную частоту и соответствующую форму моды колебаний. Более современное решение матриц с помощью цифрового компьютера предоставило еще один способ анализа проблем вибрации. Примерами этого являются работы Позняк Г.Г. [2]. Хонрат [3] разработал матричный метод с использованием цифрового компьютера для вычисления собственных частот и форм мод свободных колебаний для шпинделей на многих упругих опорах. Такие результаты дают некоторое представление о динамической

проблеме. Проблема, которую необходимо решить, - это проблема вынужденной вибрации шпиндельной конструкции с демпфированием и упругими опорами.

В данной работе представлен метод, использующий аналоговый компьютер, для определения статического и динамического поведения шпинделя станка на упругих опорах с демпфированием и внешним возбуждением. Математическая модель состоит из набора конечно-разностных уравнений, сформулированных (в соответствии с подходом Howe и Howe [4]) из основного дифференциального уравнения общего сечения распределенного вала.

Для проверки полезности метода будет проведен анализ токарного шпинделя на реальном серийном станке. Представлено сравнение измеренных и рассчитанных статических и динамических характеристик. Затем обсуждается влияние нескольких переменных параметров шпинделя.

## **Формулировка математической модели и компьютерное решение**

Шпиндель токарного станка - это, по сути, упругая балка, поддерживаемая нежесткими ограничителями. Энергия поступает в систему за счет приложения внешних нагрузок и рассеивается из системы за счет источников демпфирования.

Схематическое изображение шпинделя показано на рис. 1(а). Шпиндель имеет, в общем случае, изменяющиеся поперечный момент  $I(x)$  и массу  $\rho(x)$ . Имеется некоторая внешняя нагрузка, и шпиндель поддерживается двумя или более подшипниками, которые могут

быть представлены комбинацией пружины и демпфера. Меняющаяся во времени внешняя нагрузка вызывает колебания балки с различными кривыми прогиба, как показано на рис.

1(b). Силы и моменты, действующие на небольшой элемент балки, показаны на рис. 1(c). Нагрузка  $w(x, t)$  является общим выражением для всех возможных нагрузок вдоль балки.

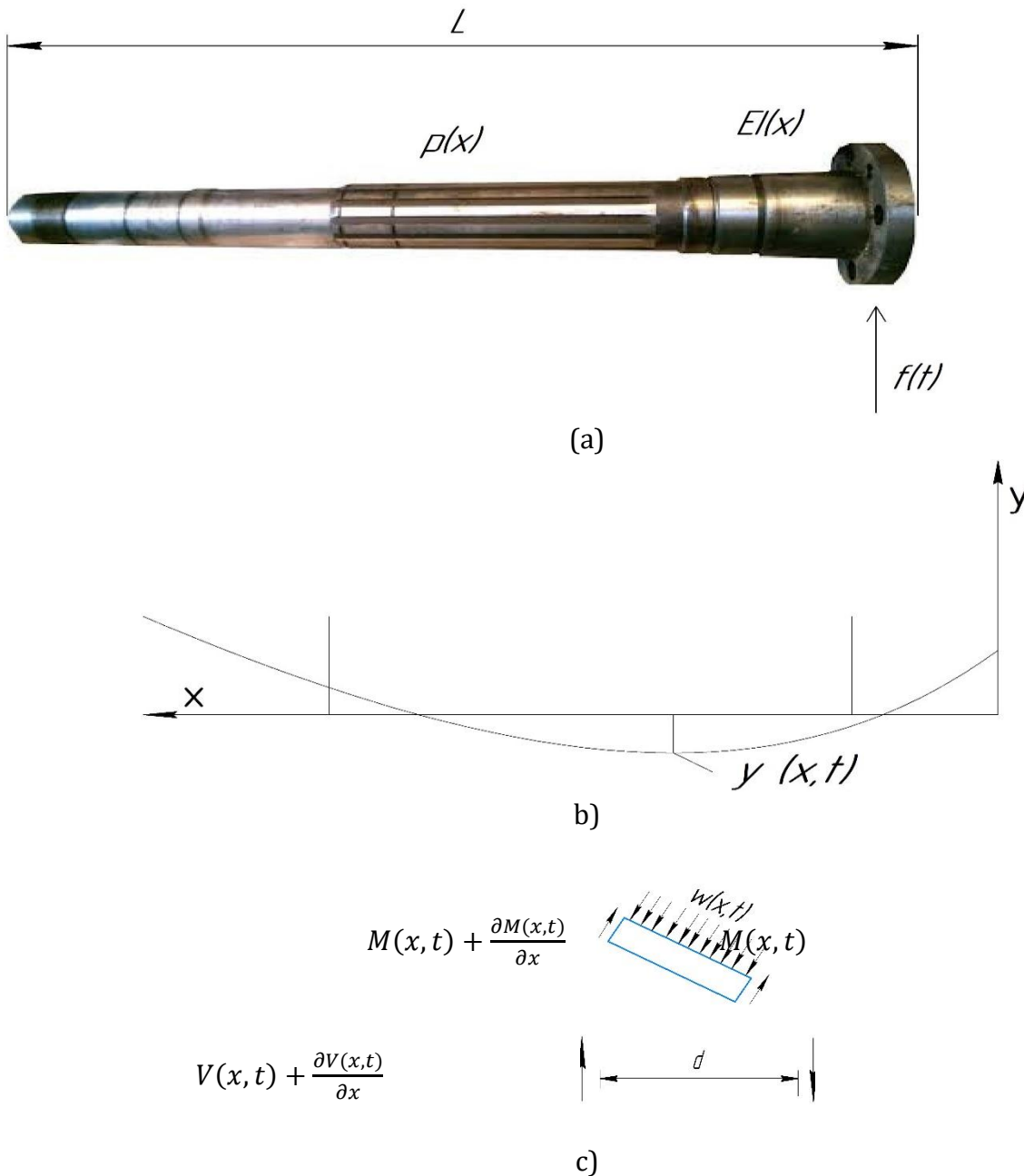


Рис. 1. Изображение шпинделя токарного станка.

Если в качестве основных предположений принять, что во время вибрационного движения плоскости изгиба остаются параллельными и что

балка имеет большое отношение длины к диаметру, то для системы можно записать следующее дифференциальное уравнение для нагрузки вдоль балки [5].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = w(x,t) \quad (1)$$

Нагрузка  $w(x, t)$  состоит из следующих четырех принципиальных членов.

1. Сила инерции

$$f_d = \rho(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

2. Усилие пружины подшипника

$$f_k = k(x) y(x,t) \quad (3)$$

3. Демпфирующая сила

$$f_c = c(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \quad (4)$$

4. Внешне приложенные силы

$$f_{ext} = f(x,t) \quad (5)$$

Уравнение (1) представляет собой дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными,  $x$  и  $t$ . Чтобы использовать аналоговый компьютер общего назначения для решения этого уравнения и, таким образом, для анализа шпинделя, необходимо изменить математическую модель для решения задачи с одной независимой переменной. Фактически, это можно сделать двумя способами. Во-первых, рассмотрите шпиндель в данный момент времени  $t$  и проинтегрируйте по лучу с  $x$  в качестве

независимой переменной. Во-вторых, рассмотрите конкретные точки вдоль балки и считать  $t$  независимой переменной в каждой из этих точек. Последний вариант более приемлем для задачи о шпинделе, поскольку мы заинтересованы в изучении вынужденной вибрации затухающего шпинделя.

Математическая процедура, которая может быть использована для второго варианта, известна как метод конечных разностей. В этом методе шпиндель делится на несколько частей

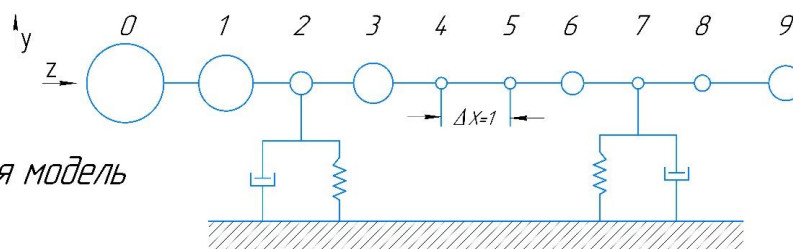
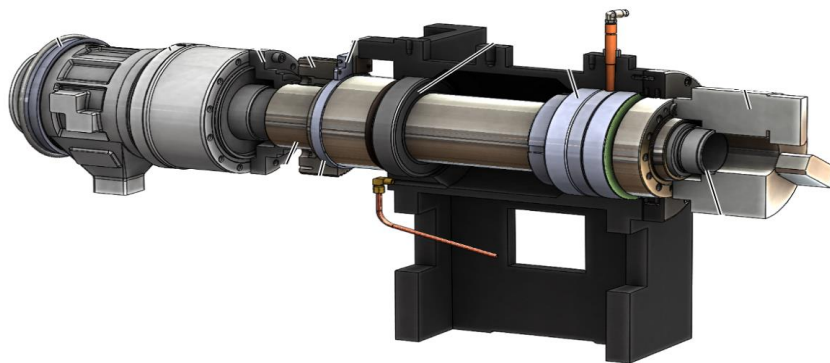


Рис. 2. Аналоговая компьютерная модель шпинделя 10 масс

секций, и получается набор обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющих изменяющиеся во времени движения каждой из секций.

На рисунке 2 показан шпиндель и эквивалентная динамическая система. В приведенном примере шпиндель разделен на секции равной длины, что дает в общей сложности 10 масс и 9 секций вала. Единственные ограничения на выбор  $\Delta x$  заключаются в том, чтобы он был постоянным и чтобы расположение масс примерно соответствовало концентрации масс в реальной системе. Поскольку положение подшипника является несколько критическим, при исследовании конкретного шпинделя оказалось полезным выбрать  $\Delta x$  на основе интегрального числа делений межцентрового расстояния подшипника.

Таким образом, массы размещаются в центре каждого подшипника, вдоль пролета между подшипниками и вдоль нависающих концов. Из рис. 2 можно сделать вывод, что для разумного приближения системы необходимо минимум пять масс.

Математическая техника преобразования уравнения (1) в набор уравнений конечных разностей приведена в Приложении. Полученная математическая модель может быть обобщена следующими двумя наборами уравнений.

Во-первых, уравнения движения для различных масс получаются из уравнения (A-7)

$$\begin{aligned}
 \phi_{a_0} \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} &= -m_1 + F_0(\tau) \\
 \phi_{a_1} \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} &= -m_2 + 2m_1 \\
 \phi_{a_2} \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} &= -m_3 + 2m_2 - m_1 - c_2 \frac{dy_2}{d\tau} - k_2 y_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \phi_{a_9} \frac{d^2 y_9}{d\tau^2} &= -m_8
 \end{aligned}
 \tag{6}$$



Во-вторых, уравнения моментов записываются из уравнения (А-6)

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= 0 \\ m_1 &= \phi_{f_1}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ m_2 &= \phi_{f_2}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ m_8 &= \phi_{f_8}(y_9 - 2y_8 + y_7) \\ m_9 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты жесткости подшипника и демпфирующей силы,  $k_n$  и  $c_n$ , могут быть рассчитаны по соотношениям, приведенным в уравнении (А-8). Фактические значения жесткости подшипника могут быть получены из кривых нагрузки и прогиба реального шпинделя или оценены по техническим данным и экспериментально. Фактические коэффициенты демпфирования вычислить сложно, если не невозможно. В случае исследования существующего токарного станка его проще всего использовать как неизвестное в формуле уравнения. Когда система запрограммирована, коэффициенты

демпфирования могут быть отрегулированы для получения переходного отклика, аналогичного экспериментальному.

$\phi_{d_n}$  и  $\phi_{f_n}$  безразмерные величины, представляющие собой изменение массы шпинделя и момента инерции поперечного сечения шпинделя соответственно. Оба этих безразмерных параметра могут быть вычислены непосредственно по инженерному чертежу.

Аналоговая компьютерная схема для решения наборов уравнений, приведенных в (6) и (7) показан на рис. 3.

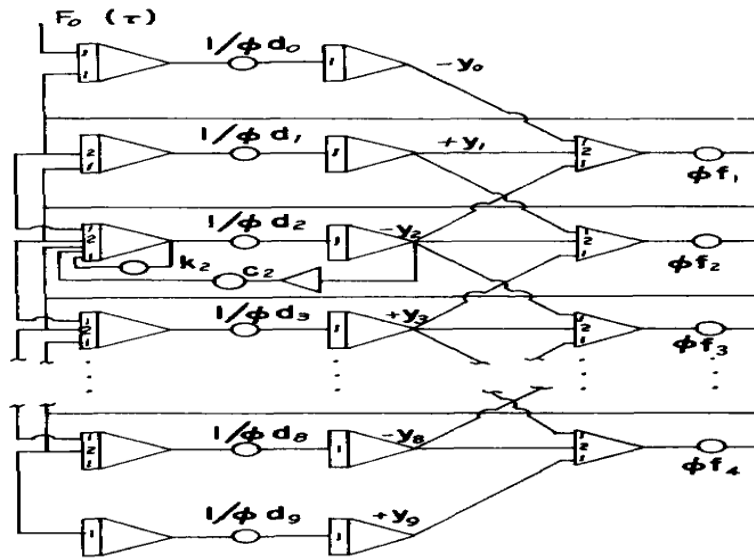


Рис. 3. Схема аналогового компьютера.

Начальный этап исследования конкретного шпинделя включает в себя определение параметров  $EI(x)$ ,  $p(x)$ ,  $c(x)$  и  $k(x)$ . Процесс оценки этих параметров был упрощен введением безразмерных вариаций параметров.

Сначала рассмотрим расчет изгибной жесткости  $EI(x)$ . Рисунок 4 представляет собой график изменения  $EI(x)$  вдоль шпинделя. Затем функция  $EI(x)$  усредняется по каждой массе и вычисляются дискретные значения каждой  $\phi_f$  (т.е.  $\phi_{f_1}, \phi_{f_2}, \dots, \phi_{f_n}$ ). В этом случае  $EI$  это наибольшее значение  $EI(x)$  с соответствующим  $\phi_{f_1}$  единства.

Распределение массы получается аналогичным образом.  $\rho_0$  приравнивается к наибольшему  $\rho(x)$  и соответствующее ему  $\phi_d$  равно единице.

Жесткости подшипников являются более сложными для вычислений. В данном случае эти значения были получены опытным путем на исследуемом токарном станке. На рисунке 5 показан набор кривых статической нагрузки и прогиба, полученных опытным путем. Кривые прогиба под нагрузкой, построенные по этим данным для каждого подшипника, показаны выше. Подшипник жесткости затем аппроксимировались прямолинейными вариациями. Однако нелинейность может быть учтена в компьютерной модели, если она имеет существенное значение в конкретном случае. Например, это имеет особое значение, когда необходимо рассмотреть влияние силы резания на оптимальную длину шпинделя.

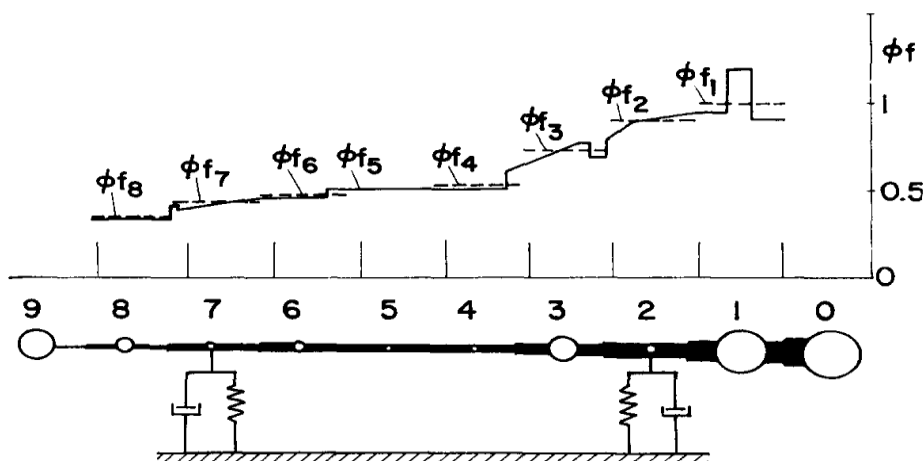


Рис. 4.

4.

Вычисление относительного момента поперечного сечения.

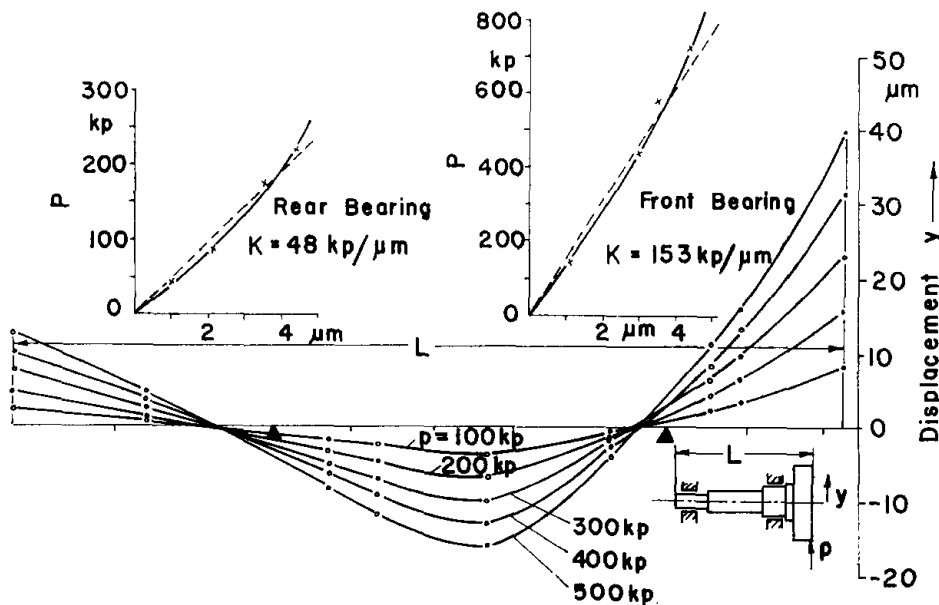


Рис. 5. Кривые статического прогиба и жесткость подшипника шпинделя токарного станка.

Определение коэффициентов демпфирования для модели шпинделя является наиболее сложной оценкой. Демпфирование является функцией стольких переменных в сложной конфигурации шпинделя, что вычисление значения демпфирования по инженерным чертежам может считаться нецелесообразным. Для получения этого значения неизменно приходится полагаться на опыт. В данном случае реальный шпиндель был возбужден ударом, и затухающая свободная вибрация была записана. Огибающая кривой вибрации была использована для расчета эквивалентного вязкого демпфирования. В данном случае демпфирование составило 0-034 от критического. На компьютере

демпфирование было включено в подшипники и отрегулировано до тех пор, пока аналогичное затухание свободной вибрации не наблюдалось на конце шпинделя. В реальности демпфирование также распределяется вдоль шпинделя. Если компьютер достаточно мощны, то можно включить и этот тип демпфирования. [В представленном здесь исследовании рассматривалось только демпфирование относительно системы отсчета.

### Вывод

Представлен метод анализа шпинделей станков. Применение метода проиллюстрировано на примере шпинделя токарного станка. Этот базовый подход, использующий



аналоговый компьютер, применим к любому шпинделю станка, для которого определена система координат для положения подшипников. В рассматриваемом здесь случае шпиндель и подшипники считались установленными в жесткой конструкции. Если конструкция станка не является жесткой по отношению к шпинделю и его подшипникам, необходимо учитывать другие жесткости и распределения масс.

Подход с использованием метода конечных разностей для формулировки модели шпинделя и решение уравнений с помощью аналогового компьютера обеспечивает эффективный и полезный метод анализа переменных, участвующих в такой проблеме проектирования. Согласие кривых статического прогиба и форм вибрационных режимов обеспечивает достаточную проверку компьютерных результатов, чтобы оправдать использование этого метода в процессе проектирования.

При анализе конкретного рассматриваемого шпинделя было исследовано влияние жесткости подшипников, положения подшипников, использования трех

подшипников, демпфирования системы и влияния заготовки. Вся эта информация может быть получена за относительно короткое время с помощью аналогового компьютера.

При применении этого подхода большая часть информации может быть получена из инженерных чертежей. Жесткость подшипников должна быть получена из предыдущих исследований. Демпфирование в системе должно быть оценено на основе опыта и испытаний. Последнее не влияет на анализ статического поведения, но ограничивает абсолютную точность динамических исследований, так как было показано, что различные условия демпфирования играют важную роль в определении амплитуды колебаний.

Аналоговый компьютер не предоставляет проектировщику полностью автоматизированный процесс оптимизации проектной задачи. Однако он предоставляет средства анализа, позволяющие объединить ответы, полученные от компьютера, с процессом принятия решений человеком. В результате мы получаем экономичный и надежный инженерный подход к оптимизации конструкции шпиндельной системы.

## Литературы:

1. Mindlin R. D., Goodman L. E. Beam vibration with time-dependent boundary conditions // ASME. J. Appl. Mech. 1950. V. 17. P. 377–380.
2. Позняк Г.Г., Рогов В.А. Балансировка шпинделя особо точного токарного станка // ИТО (Инструмент, технология, оборудование). -2002. - №3. – с.25-26.
3. K. HONRATH, *Forschungsbericht* 7. W. Girardef, Essen (1957).
4. E. E. Howe and R. M. Howe, *Report of the Engineering Research Institute*, The University of Michigan, Project 2115 (1954).



5. W. Weaver Jr. and S. P. Timoshenko Vibration Problems in Engineering, 5th Edition,  
published by Wiley (1991).