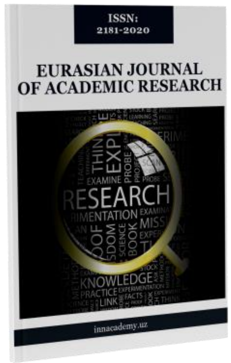
EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz



CONTINUOUS, DIFFERENTIALIZED FUNCTIONS

Gulchehra Ortig'aliyeva[1]
[1] Student, National University of Uzbekistan, Faculty of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan
https://doi.org/10.5281/zenodo.5136580

ARTICLE INFO

Received: 15th July 2021
Accepted: 20th July 2021
Online: 25th July 2021

KEY WORDS

function, limit, point, continuous, differential, Weierstrass function.

ABSTRACT

We know that continuity is a necessary condition for the differentiability of a function. This may sometimes lead to incorrect assumptions assuming all continuous functions are differentiable. However, this is wrong in general. In this article, we introduce functions that are continuous but differentiable nowhere, as well as the Weierstrass function.

UZLUKSIZ, DIFFERENSIALLANMAYDIGAN FUNKSIYALAR

Gulchehra Ortig'aliyeva[1]
[1] Talaba, O'zbekiston Milliy Universiteti, Matematika fakulteti, Toshkent, O'zbekiston

MAQOLA TARIXI

Qabul qilindi: 15-iyul 2021
Ma'qullandi: 20-iyul 2021
Chop etildi: 25-iyul 2021

KALIT SO'ZLAR

funksiya, limit, nuqta, uzluksiz, differensial, Veyershtras funksiyasi.

ANNOTATSIYA

Bizga ma'lumki, funksiya differensiallanuvchi bo'lishi uchun u albatta uzluksiz bo'lishi kerak. Bundan demak funksiya uzluksiz bo'lsa u differensiallanuvchidir degan xulosaga kelishimiz mumkin. Ammo bu noto'g'ri. Biz ushbu maqolada uzluksiz lekin differensiallanuvchi bo'lmagan funksiyalar hamda Veyershtras funksiyasi bilan tanishib, o'rganib chiqamiz.

Asosiy qism

Differensial hisoblash 17-asrning ikkinchi yarmida I. Nyuton va G. V. Leybnits asarlari ta'siri ostida mustaqil fan sifatida rivojlanib, unda ular differensial hisoblashning asosiy qoidalarini shakllantirdilar va differensiallash va integrallash kabi o'zaro teskari amalni qayd etdilar.

Differensial va integral hisobni yaratish matematikaning rivojlanishida yangi davrni ochdi, bir qator yangi matematik fanlarni paydo bo'lishiga olib keldi. Bular:qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi, differensial geometriya variatsiyalar hisobi, funksional tahlil va shu kabilardir.Yana shuni ta'kidlab o'tish joizki bu soha matematikani tabiatshunoslik va texnika savollariga qo'llash imkoniyatini yaratdi. Differensial hisoblash funksiya, limit, differensiallik, uzluksizlik kabi fundamental tushunchalarga asoslanadi. Ushbu tushunchalar differensial va integral

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

hisobni ishlab chiqish jarayonida zamonaviy shaklga ega bo'ldi. Differensial hisoblashning asosiy g'oyalari va tushunchalari funksiyalarni kichik, ya'ni alohida nuqtalarning kichik oralig'ida o'rganish bilan bog'liq bo'lib, bu funksiyalarni o'rganish uchun matematik apparat yaratishni talab qiladi, uning harakati yetarlicha kichik oraliqda uning aniqlanish sohasining har bir nuqtasi chiziqli funksiyaga yaqin bo'ladi.

Ta'rif 1 [1]: $y=f(x)$ funksiya quyidagi uchta shartni bajarsa, funksiya berilgan nuqtada uzluksiz deyiladi:

1) $y=f(x)$ x_0 nuqtada aniqlanadi , $x_0\in D(f)$;

2) x_0 nuqtada limiti mavjud: $\lim_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;

Ta'rif 2 [1]: Agar $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0:$ $\forall x$ $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ shartni bajarsa, $y=f(x)\,x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi .

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0:$ $|\Delta x|<\delta\Rightarrow|\Delta y|<\varepsilon$ ya'ni $\Delta x\to0$ $\Delta y\to0$ shartni bajarsa, $|x-x_0|=\Delta x$ argument orttirmasi, $|f(x)-f(x_0)|=\Delta y$ - funksiya orttirmasi , funksiya $y=f(x)$ x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi

Ta'rif 3[1]: $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi,agar argument orttirmasi cheksiz kichik miqdorga intilganda funksiya orttirmasi ham cheksiz kichik miqdorga intilsa.

$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0$

Ta'rif 4[1]: $y=f(x)$ funksiya X to'plamning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, funksiya ushbu to'plamda uzluksiz deyiladi.

Endi biz uchun qiziq bo'lgan, ya'ni uzluksiz ammo differensiallanuvchi bo'lmagan funksiyalar bilan tanishib chiqamiz.

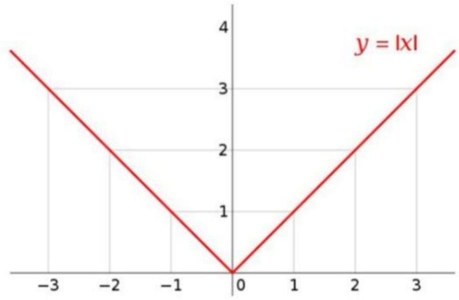
1-misol.

$f(x)=|x|$ funksiyani x_0 nuqta atrofida tekshiramiz.

Bu yerda $x\to0$ $f(x)\to f(0)$ bo'lgani uchun funksiya $x_0=0$ nuqtada uzluksiz.

Hosilasini tekshiraylik, $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ limit mavjud emas.

Funksiya $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi



emas , ammo uzluksiz.

2-misol.

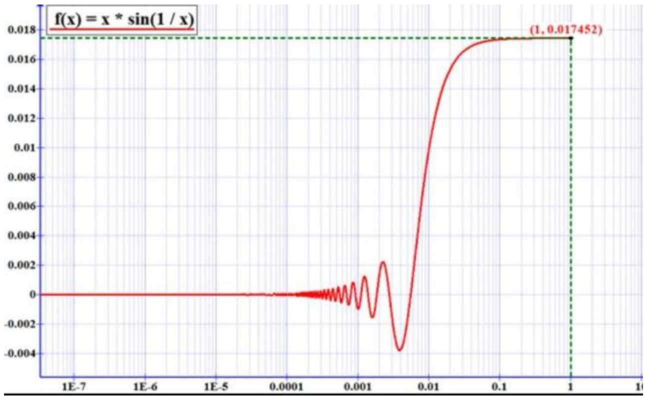
$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, x\neq0\\ 0, x=0\end{cases}$$ funksiya uzluksiz, ammo differensiallanuvchi emas.

Funksiya $x\neq0$ da uzluksiz ekanligi ravshan, $x\to0$ da funksiya limiti 0 ga teng bo'lgani uchun 0 da ham uzluksiz, demak, barcha nuqtalarda uzluksiz, ammo 0 da differensialanuvchi emas

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x}$$

.

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz



Endi biz uchun qiziq bo'lgan yana bir misol bilan tanishamiz.

Veyershtras funksiyasi

XIX asrda ko'plab matematiklar uzluksiz funksiyalar har doim differensiallanuvchi bo'lishi kerak degan fikrda bo'lishgan. Ammo 1872-yilda bu fikrning noto'g'ri ekanligini Karl Veyershtras isbotlab matematiklarni hayratda qoldirdi. Uzluksiz ammo differensiallanmaydigan misol sifatida birinchi bo'lib, Veyershtrasning misoli ko'rsatildi. Uning funksiyasi

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x).$$

Xususan Veyershtras quyidagi teoremani isbotladi:

Teorema (Veyershtras 1872) Agar $a\in(0,1),\ b>1$ toq butun sonlar, u holda

$$ab>1+\frac{3}{2}\pi$$

(1)

Shart o'rinli bo'lsa, W funksiya R da uzluksiz ammo differensiallanuvchi emas.

W ning R da uzluksiz ekanligini bemalol ko'rishimiz mumkin,

$$\left|a^n\cos(b^n\pi x)\right|=a^n\left|\cos(b^n\pi x)\right|\le a^n$$

Geometrik qator $\sum a^n$ $a\in(0,1)$ da yaqinlashadi, bundan ko'rinadiki Veyershtras funksiyasi R da yaqinlashadi.Chunki har bir funksiya $a^n\cos(b^n\pi x)$ uzluksiz, uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining yagona chegarasi bo'lib, har bir qismiy yig'indi uzluksiz va shuning uchun ham W uzluksiz .

(1) Shart uchun quyidagi qismiy yig'indini ko'rib chiqamiz.

$$W_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a^k\cos(b^k\pi x).$$

Bu qismiy yig'indi differensiallanuvchi funksiya va

$$W'_n(x)=-\sum_{k=0}^{n}\pi(ab)^k\sin(b^k\pi x).$$

Agar $ab<1$, biz yana Veyershtrass funksiyasini W ning uzluksiz funksiyaga teng ravishda R ga yaqinlashishini ko'rsatishimiz mumkin. U holda biz W ning differensiallanuvchiligini va $W'_n\to W'$ bo'lishini ko'rsatishimiz mumkin. Shuning uchun W differensiallanuvchi bo'lmasligi uchun bizga $ab\ge1$ degan shart kerak.

Xulosa o'rnida shuni aytishimiz mumkinki, funksiya differensiallanuvchi bo'lishi uchun uzluksiz bo'lishi har doim ham to'g'ri bo'lmaydi. Yuqorida biz guvohi bo'ldikki, funksiya uzluksiz bo'lib ammo differensiallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin ekan. Bu ham fanimizning ajoyib sirlaridan biridir. Siz ham shunday funksiyalarga misollar qidirib ko'ring

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т. П [Текст] / Г. М. Фихтенгольц – М., Наука, 1970-800 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа т. I/ Фихтенгольц Г. М. Наука, 1968-441 с.
3. Писменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике // Режим доступа: https://studfiles.net/preview/5808192/ (дата обращения).
4. Weierstrass's non-differentiable function. Jeff Calder (December 12, 2014).