



FUR'E METHOD OF SOLVING BORDER AND INTERFERENCE PROBLEMS FOR WAVE EQUATIONS

Xushvaqtova Yulduz Bahriddinovna ¹

¹Termez State University, 1st year master in "Mathematics Education"

<https://doi.org/10.5281/zenodo.4766372>

ARTICLE INFO

Received: 1st May 2021
Accepted: 5th May 2021
Online: 10th May 2021

KEY WORDS

Fourier method, differential equation, Stuurm-Liuvill problem, Weierstrass theorem

ABSTRACT

One of the most widely used methods in the solution of boundary or mixed problems in the theory of differential equations with special derivatives is the method of separation of these variables or the Fourier method. In this paper, this method is considered in the example of boundary value problem 1, which is applied to the equation of free oscillation of a network with tightly fixed ends.

TO'LQIN TENGLAMASI UCHUN CHEGARAVIY VA ARALASH MASALARNI YECHISHNING FUR'E USULI

Xushvaqtova Yulduz Bahriddinovna ²

¹Termiz Davlat Universiteti "matematika ta'lim" yo'nalishi 1-bosqich magistranti

MAQOLA TARIXI

Qabul qilindi: 1-May 2021
Ma'qullandi: 5-May 2021
Chop etildi: 10-May 2021

KALIT SO'ZLAR

Fur'e usuli, differensial tenglama, Stuurm-Liuvill masalasi, Veyershtrass teoremasi

ANNOTATSIYA

Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida chegaraviy yoki aralash masalalrni yechishda eng ko'p qo'llaniladigan usullardan biri bu o'zgaruvchilarni ajratish yoki Fur'e usuli hisoblanadi. Ushbu maqolada bu mavzuda ushbu usulni uchlari mustahkam mahkamlangan torning erkin tebranish tenglamasiga qo'yilgan 1-chegaraviy masala misolida ko'rib chiqiladi.

Masalaning qo'yilishi.

Biz oldingi mavzularda to'lqin tenglamasi uchun uchta turdagi chegaraviy masalalar va aralash turdagi chegaraviy masalalarning qo'yilishi bilan tanishgan edik. Hozir biz bir jinsli chegaraviy shartli 1-chegaraviy masala yechimini, ya'ni

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < \ell, t > 0 \quad (1.1.1)$$

to'lqin tenglamasining

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x), 0 < x < \ell \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

boshlang'ich shartni hamda uchlari mustahkamlanishga mos (uchlari siljishi yo'q)

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(\ell,t) &= 0, t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

1-tur chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish bilan tanishamiz.



Xuddi shu kabi bir jinsli 2-tur va 3-tur chegaraviy masalalarni hamda ular yordamida tuzuladigan aralash tipdagi bir jinsli chegaraviy masalalarni ham ta'riflashimiz mumkin (Oldingi mavzularda mavjudligi uchun ularni keltirishni o'quvchiga havola qilamiz).

Bizga yagonalik teoremasidan ma'lumki qoyiladigan bu chegaraviy masalalar yagona yechimga ega. Quyida biz ushbu yechimni topish masalasi bilan tanishamiz.

Yechish usuli.

Hozircha (1.1.1)-(1.1.3) masalaning

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad 0 < x < \ell, t > 0 \quad (1.1.4)$$

ko'rinishdagi nolmas yechimi mavjud deb faraz qilamiz va uning ko'rinishini topamiz. Buning uchun (1.1.4) dan kerakli xususiy hosilalarni olamiz

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t), \quad u_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$$

hamda ularni (1.1.1) ga qo'yamiz:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Ushbu tenglamani shartga ko'ra aynan nolga teng bo'lmagan $a^2 X(x)T(t)$ ifodaga bo'lib, unga teng kuchli bolgan tenglamaga kelamiz:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}.$$

Bu tenglamaning chap qismi faqat $x \in (0, \ell)$ o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, uning o'ng tomoni faqat $t \in (0, +\infty)$ o'zgaruvchining funksiyasidan iboratdir. Demak u nolmas yechimga ega bo'lishi uchun har ikkala kasrlar aynan bir o'zgarmas songa teng bo'lishi kerak. Hisoblashda qulaylik bo'lsishi uchun uni $-\lambda$ deb belgilaymiz:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda. \quad (1.1.5)$$

Tabiiyki (1.1.5) tenglamalar sistemasi aynan nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lishi lozim bo'lgan quyidagi

ikkita oddiy diferensial tenglamalarga ajraladi:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0.$$

(1.1.3) chegaraviy shartlarni qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(\ell,t) = X(\ell)T(t) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Shartga ko'ra $T(t) \neq 0$, aks holda $u(x,t) \equiv 0$ bo'lar edi. Shuning uchun yuqoridagi chegaraviy shartlardan

$$X(0) = X(\ell) = 0$$

shartlarni hosil qilamiz. Shunday qilib biz qo'yilgan chegaraviy masalani yechish jarayonida $X(x)$ funksiya uchun Sturmliu vill masalasi deb ataluvchi quyidagi masalaga keldik.

Sturm-Liu vill masalasi va uni yechish.

Ta'rif. λ ning

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

masala nolmas yechimga ega bo'ladigan qiymatiga shu masalaning xos qiymati va unga mos nolmas yechimga esa λ xos qiymatga mos xos funksiya deyiladi. λ xos qiymatni va unga mos xos funksiyani topish masalasiga odatda Sturm-Liu vill masalasi deb yuritiladi.

Ushbu masalaning yechimini topish maqsadida λ ning manfiy, nolga teng va musbat qiymatli hollarini alohida – alohida qaraymiz.

1-hol. Faraz qilaylik $\lambda < 0$ bo'lsin. Bu holda differensial tenglamalar kursidan bizga ma'lumki, (2.1.6) dagi ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (1.1.7)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda C_1, C_2 - ixtiyoriy haqiqiy sonlar. Ularni shunday tanlaymizki, (2.1.6) dagi chegaraviy shartlar o'rinli bo'lsin:



$$\left. \begin{aligned} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 e^{\ell\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\ell\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{aligned} \right\} \text{yoki}$$

$$\left. \begin{aligned} C_2 = -C_1 \\ C_1(e^{\ell\sqrt{-\lambda}} - e^{-\ell\sqrt{-\lambda}}) = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Qaralayotgan holda $\lambda < 0$ va $\ell > 0$ haqiqiy sonlar bo'lganligi uchun $e^{\ell\sqrt{-\lambda}} - e^{-\ell\sqrt{-\lambda}} \neq 0$. Demak ikkinchi tenglamadan $C_1 = 0$ va birinчисidan esa $C_2 = C_1 = 0$ hosil bo'ladi.

Demak (1.1.7) ga asosan $\lambda < 0$ bo'lganda (1.1.6) masala faqat nol yechimga ega bo'lar ekan, ya'ni bu holda Shtuurm-Liuuill masalasi xos qiymat va xos funksiyaga ega emas ekan.

2-hol. Faraz qilaylik $\lambda = 0$ bo'lsin. Bu holda (1.1.6) dagi ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama $X''(x) = 0$ bo'lib, ununig umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad (1.1.8)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda C_1, C_2 - ixtiyoriy haqiqiy sonlar. (2.1.6) dagi chegaraviy shartlardan ularni tanlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \ell + C_2 = 0 \end{aligned} \right\} \text{yoki}$$

$$\left. \begin{aligned} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Demak (1.1.8) ga asosan $\lambda = 0$ holda ham (1.1.6) masala faqat nol yechimga ega bo'lib, Shtuurm-Liuuill masalasi xos qiymat va xos funksiyaga ega bo'lmas ekan.

3-hol. Faraz qilaylik $\lambda > 0$ bo'lsin. Bu holda differensial tenglamalar kursidan bizga ma'lumki, (1.1.6) dagi ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama ikkita qo'shma kompleks xarakteristik ildizlarga ega bo'lib, uning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (1.1.9)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda C_1, C_2 - ixtiyoriy haqiqiy sonlar. Ularni shunday tanlaymizki, (1.1.6) dagi chegaraviy shartlar o'rinli bo'lsin:

$$\left. \begin{aligned} X(0) = C_1 = 0 \\ X(\ell) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0 \end{aligned} \right\}.$$

$X(x) \neq 0$ ekanligidan $C_2 \neq 0$ bo'ladi.

Demak bu sistemadan

$$\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$$

ekanligini olamiz. Bu sodda trigonometrik tenglamaning yechimi

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Shunday qilib, (1.1.6) masala faqat

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{bo'lgan holda}$$

aynan nolga teng bo'lmagan

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

yechimlarga ega bo'lar ekan. Bunda C_n - ixtiyoriy doimiy.

Demak (1.1.6) Shtuurm-Liuuill

masalasi uchun $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 > 0$ sonlar

xos qiymatlar va

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (1.1.10)$$

funksiyalar esa o'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida olingan xos funksiyalar bo'ladi. Bu xos funkiyalar skalyar ko'paytmasi uchun

$$(X_n, X_m) = \int_0^\ell X_n(x) X_m(x) dx = \int_0^\ell \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{m\pi}{\ell} x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\ell \cos \frac{(n-m)\pi}{\ell} x - \cos \frac{(n+m)\pi}{\ell} x dx \right\} = \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & \text{agar } n = m \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } n \neq m \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

tenglik o'rinli.



Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Тиханов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. Наука, 1972.-736с2.
2. Крикова Ю.М. Лекции по уравнениям математикой физики и интегральным уравнениям. – Казань: Казанск. Ун-та, 1970. – 210с.
3. Вуков Э.А., Ефимов А.В., Земсков В.Н. и др. Сборник задач по матиматике для вузов. Методы оптимизации. Уравнения в частых производных. Интегральные уравнения. Наука, 1990-304 с.