EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

RELATED STATE OF A TWO-PARTICLE HAMILTONIAN ON A LATTICE

S.M.Samatov [1], B.Normonov [2]
[1] Samarkand State University
https://doi.org/10.5281/zenodo.4765648

ARTICLE INFO

Received: 5th May 2021
Accepted: 10th May 2021
Online: 15th May 2021

KEY WORDS

social protection, the right of a citizen, national characteristics, duties of the state, types of pension models - distributive, mandatory-accumulative, voluntary-accumulative, mechanisms for the implementation of social policy.

ABSTRACT

This article examines the role of pension provision in the social protection of citizens. The question of the need to establish principles that will play a role in protecting citizens in pension provision. The importance of society's awareness of the need to take measures for its well-being in the future. The practice of foreign countries of the share of citizens' participation in personal savings in preparation for retirement is considered. The types of accumulative pension contributions in the Republic of Uzbekistan are considered, as well as the issue of stimulating the participation of citizens in the accumulative pension system.

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА РЕШЕТКЕ

С.М.Саматов [1], Б.Нормонов [2]
[1,2] Самаркандский государственный университет

ИСТОРИЯ СТАТЬИ

Принято: 5 мая 2021 г.
Утверждено: 10 мая 2021 г.
Опубликовано: 15 мая 2021 г.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Целочисленное решетка, двухчастичный гамильтониан, контактный потенциал, связанные состояние, двухчастичный дискретный оператор Шредингера, спектр, разложимые операторы.

АННОТАЦИЯ

В этой статье рассматривается гамильтониан системы двух произвольных частиц на мерной целочисленной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. С помощью спектра двухчастичного дискретного оператора Шредингера описывается структура связанных состояний рассматриваемого гамильтониана в зависимости отразмерности решетки.

Дискретный спектр двухчастичного непрерывного оператора Шредингера

$$h = -\Delta + \mu V$$

исследовался многими авторами [1-3], причем условия на потенциал V формулировались в его координатном представлении.

Дискретный оператор Шредингера, т.е. оператор Шредингера соответствующий системе двух частиц на решетке наиболее естественным образом появляется в задачах физики твердого тела [4-6].

Одним из акуальных является вопрос о зависимости число собственных значений и резонансов многочастичного дискретного оператора Шредингера от полного квазиимпульса системы и от константы связи частиц.

В этой статье рассматривается гамильтониан системы двух произвольных частиц взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения на $\nu -$ мерной целочисленной решетке.

Изучение связанных состояний рассматриваемого гамильтониана h_μ сводится к изучению спектральных свойств двухчастичного дискретного оператора Шредингера $h_\mu(k)$, действующего в гильбертовом пространстве. Установлены существования собственных значений, виртуальных уровней этого оператора и изучены зависимость от полного квазиимпульса системы и от константы связи двух частиц. Воспользуясь из теоремы о спектре разложимых операторов и из спектра оператора $h_\mu(k)$ мы опишем спектр гамильтониана h_μ в зависимости от константы связи частиц и от размерности решетки.

Пусть $Z^\nu - \nu -$ мерная целочисленная решетка, $\ell_2((Z^\nu)^m) -$ гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций определенных на $(Z^\nu)^m$.

В координатном представлении гамильтониан системы двух произвольных частиц взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения на $\nu -$ мерной целочисленной решетке, действует в $\ell_2((Z^\nu)^2)$ по следующей формуле

$$h_\mu = h_0 - \mu v. \qquad (1)$$

Здесь операторы h_0 и v действуют в $\ell_2((Z^\nu)^2)$ по формулам

$$h_0 = \frac{\ell_1}{2}\Delta_{x_1} + \frac{\ell_2}{2}\Delta_{x_2},$$

$$v\varphi(x_1, x_2) = \delta_{x_1 x_2}\varphi(x_1, x_2), \quad \varphi \in \ell_2((Z^\nu)^2).$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta \times I$, $\Delta_{x_2} = I \times \Delta$. Здесь $\Delta -$ разностный Лапласиан описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\psi)(x) = \sum_{|s|=1}[\psi(x) - \psi(x+s)], \quad \psi \in \ell_2(Z^\nu),$$

$\mu > 0 -$ энергия взаимодействия двух частиц, $\delta_{x_1 x_2} -$ символ Кронекера, $m_\alpha = (\ell_\alpha)^{-1} -$ масса частицы α,

$$|s| = |s^{(1)}| + |s^{(2)}| + \cdots + |s^{(\nu)}|, \qquad s = (s^{(1)}, s^{(2)}, \cdots, s^{(\nu)}) \in Z^\nu.$$

Пусть $\{U_s, s \in Z^\nu\}$ унитарное представление группы Z^ν через операторов сдвигов

$$(U_s\varphi)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + s, x_2 + s), \quad \varphi \in \ell_2((Z^\nu)^2).$$

Оператор h_μ коммутирует с группой сдвига $\{U_s, s \in Z^\nu\}$. Пусть $(T^\nu)^2 -$ декартово произведение $\nu -$ мерного куба $T^\nu = (-\pi, \pi]^\nu$. Рассмотрим T^ν как абелева группа в котором операции сложения и умножения на вещественное число вводится как операции сложения и

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

умножения на вещественное число в R^{ν} по модулю $(2\pi Z)^{\nu}$, где $R-$ множества вещественных чисел. Пусть $L_2((T^{\nu})^m)-$ гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на $(T^{\nu})^m$. Переход из координатного представления гамильтониана в импульсное осуществляется с помощью преобразование Фурье:

$$\Im_m : L_2((T^{\nu})^m) \to \ell_2((Z^{\nu})^m).$$

В импульсном представлении гамильтониан h_{μ} системы двух произвольных частиц действует в $L_2((T^{\nu})^2)$ как ограниченный самосопряженный оператор в виде

$$h_{\mu} = \Im_2^{-1} h \Im_2.$$

В силу (1) получим, что гамильтониан h_{μ} представляется в виде

$$h_{\mu} = h_0 - \mu v. \quad (2)$$

Свободный гамильтониан h_0 определяется по правилу

$$h_0 = \Delta_{k_1} + \Delta_{k_2},$$

где $\Delta_{k_1} = \Delta_1 \oplus I$, $\Delta_{k_2} = I \oplus \Delta_2$ и $\Delta_{\alpha}, \alpha = 1,2-$ оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\alpha}(k)$, т.е.

$$(\Delta_{\alpha} f)(k) = \varepsilon_{\alpha}(k) f(k), \quad \alpha = 1,2, \quad f \in L_2(T^{\nu}).$$

Функция $\varepsilon_{\alpha}, \alpha = 1,2$ определяется по формуле

$$\varepsilon_{\alpha}(p) = \ell_{\alpha} \varepsilon(p), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{\nu} (1 - cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(\nu)}) \in T^{\nu}.$$

Оператор взаимодействия v имеет вид

$$(vf)(k_1,k_2) = (2\pi)^{-\nu} \int_{(T^{\nu})^2} \delta(k_1 + k_2 - k_{1'} - k_{2'}) f(k_{1'}, k_{2'}) dk_{1'} dk_{2'}, \quad f \in L_2((T^{\nu})^2),$$

где $\delta(k)-$ трехмерная дельта-функция Дирака.

Пусть $k = k_1 + k_2$ -полный квазиимпульс системы двух частиц, а $\Gamma_k = \{(k_1,k_2) \in (T^{\nu})^2 : k_1 + k_2 = k\}-$ $\nu-$ мерное многообразия. Обозначим через $L_2(\Gamma_k)$ гильбертово пространство всех квадратично интегрируемых функций, определенных на Γ_k.

Так как оператор h_{μ} коммутирует с группой сдвигов $\{U_s, s \in Z^{\nu}\}$, то оператор h_{μ} коммутирует с группой операторов $\{U_s, s \in Z^{\nu}\}$. Поэтому h_{μ} разлагается в прямой интеграл

$$h_{\mu} = \int_{T^{\nu}} \oplus h_{\mu}(k) dk \qquad L_2((T^{\nu})^2) = \int_{T^{\nu}} \oplus L_2(\Gamma_k) dk,$$

где семейство ограниченных самосопряженных операторов $\{h_{\mu}(k), \ k \in T^{\nu}\}$ унитарно эквивелентен к семейству операторов $\{h_{\mu}(k), k \in T^{\nu}\}$ действует в пространстве $L_2(T^{\nu})$ по формуле

$$h_{\mu}(k) = h_0(k) - \mu v, \qquad (3)$$

где операторы $h^{(0)}(k)$ и v определяются формулами

$$h_0(k) f(q) = \varepsilon_k(q) f(q), \quad vf(q) = (2\pi)^{-\nu} \int f(q') dq', \quad f \in L_2(T^{\nu}).$$

Невозмущенный оператор $h_0(k)-$ есть оператор умножения на непрерывную функцию $\varepsilon_k(q)$. Поэтому его спектр совпадает с областью значений функции $\varepsilon_k(q)$.

Очевидно, что оператор взаимодействия $v-$ есть одномерный интегральный оператор ранга 1 порожденный ядром $v(q,s) \equiv (2\pi)^{-\nu}$. Поэтому в соответствии с теоремой Вейля о существенном спектре непрерывный спектр $\sigma_{cont}(h(k))$ оператора $h(k)$ не зависит от $\mu > 0$ и совпадает со спектром $\sigma(h_0(k))$ невозмущенного оператора $h_0(k)$. Таким образом

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

$$\sigma_{cont}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{min}(k) = \min_{q\in T^\nu} \varepsilon_k(q), \quad \varepsilon_{max}(k) = \max_{q\in T^\nu} \varepsilon_k(q).$$

Пусть $C(T^\nu)$ – Банахово пространство непрерывных функций определенных на T^ν.

Определение. *Пусть* $\nu \geq 3$. *Если уравнение*

$$\mu(2\pi)^{-\nu} \int_{T^\nu} (\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{min}(k))^{-1} \varphi(q) dq = \varphi(q) \quad (4)$$

имеет нетривиальное решение в $\varphi \in \mathrm{C}(T^\nu)$, $\varphi(0) = 1$, то говорят, что оператор $h_\mu(k)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра.

Положим

$$\mu(k) = (2\pi)^\nu \left(\int_{T^\nu} (\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{min}(0))^{-1} dq \right)^{-1},$$

$$\mu_{min} = \min_{k\in T^\nu} \mu(k) = \mu(0), \quad \mu_{max} = \max_{k\in T^\nu} \mu(k) = \mu(\pi).$$

Из явного вида определителя Фредгольма рассматриваемого оператора и из свойств этого определителя как функции от $\mu > 0$ и $k \in T^\nu$ вытекает следующие

Теорема 1. *Пусть* $\nu = 1$ *либо* $\nu = 2$. *Тогда для любых* $\mu > 0$ *и* $k \in T^\nu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение и это собственное значение лежит левее непрерывного спектра.*

Теорема 2. *Пусть* $\nu = 3$. *а) Пусть* $0 < \mu < \mu_{min}$. *Тогда существует область* $G_\mu \subset T^3$ *такая, что для любого* $k \in G_\mu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $e_\mu(k)$ *и* $0 < e_\mu(k) < \varepsilon_{min}(k)$.

Для любого $k \notin G_\mu$ оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра.

б) Пусть $\mu = \mu_{min}$. Тогда оператор $h_\mu(0)$ имеет виртуальный уровень на левом краю непрерывного спектра, т.е. в точке $z = 0$. А при всех $k \neq 0$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$ и $e_\mu(k) \in (0, \varepsilon_{min}(k))$, $k \in T^3 \setminus \{0\}$.

в) Пусть $\mu_{min} < \mu \leq \mu_{max}$. Тогда существует непустая область G_μ, и для любого $k \in G_\mu$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$ и $e_\mu(k) < 0$.

Для любого $k \notin G_\mu$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$ и $e_\mu(k) \in (0, \varepsilon_{min}(k))$, $k \notin G_\mu$.

г) Пусть $\mu > \mu_{max}$. Тогда для любого $k \in T^3$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$ и $e_\mu(k) < 0$, $k \in T^3$.

Из теоремы 2 и теоремы о спектре разложимых операторов вытекает

Теорема 3. *i) Пусть* $\nu = 1$ *либо* $\nu = 2$. *Спектр оператора* h_μ *состоит из обиденением двух отрезков.*

ii) Пусть $\nu = 3$. а) Пусть $0 < \mu < \mu_{min}$. Тогда спектр оператора h_μ состоит из отрезка $[0, \varepsilon_{max}]$.

б) Пусть $\mu_{min} < \mu \leq \mu_{max}$. Тогда спектр оператора h_μ состоит из отрезка $[e_{\min}, \varepsilon_{max}]$, где $e_{\min} < 0$.

в) Пусть $\mu > \mu_{max}$. Тогда спектр оператора h_μ состоит из непересекающихся отрезков $[e_{\min}, e_{\min}]$ и $[0, \varepsilon_{\max}]$, причем $e_{\min} < e_{\max} < 0$.

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

Литературы:

[1]. M. Reed and B. Simon. Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

[2]. Rauch J. Perturbation theory for eigenvalues and resonances of Schrodinger Hamiltonians. J. Funct. Anal. V.35, 304-315, (1980).

[3]. Simon B. The bound state of weakly coupled Schrodinger operators in one and two dimensions. Ann. Phys. V.97, 279-288, (1976).

[4]. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems conserning spectra of lattice models. In Schodinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Seba). World. Scientific. Singapoor. 1989.

[5]. С.Н.Лакаев, А.Т.Болтаев. Пароговые явления в спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2019. Т 198. №3. с.418-432.

[6]. P.A. Faria da Viega, L.Ioriatti and M.O'Carrol. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrцdinger Hamiltonian. Phys. Rev. E(3) **66**, 016130, 9 pp. (2002).

[7]. С.Н.Лакаев, С.М.Саматов. О конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке. ТМФ, 2001, Т 129, N 3, c.415-431.