EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

LINEAR CHANGE OF VARIABLES AND ON SIMPLIFICATION OF EXPRESSIONS IN THE SPACE OF GENERALIZED FUNCTIONS

Daujanov Ainazar Shinnazarovich [1], Turganbaeva Aysanem Kuanishbaevna [2]
Raximboyev Muxtorbek [3], Xiyasova Aynura [4]
[1] Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematical Analysis, Karakalpak State University named after Berdakh.
[2,3,4] Karakalpak State University named after Berdakh, Master degree of direction of "Mathematical Analysis"
https://doi.org/10.5281/zenodo.4742240

ARTICLE INFO

Received: 20th April 2021
Accepted: 25th April 2021
Online: 30th April 2021

KEY WORDS

basic functions, locally integral functions, generalized functions, regular generalized function, function, linear change of variables.

ABSTRACT

The rigorous mathematical theory of generalized functions contains the definition of a set of basic functions, the definition of a continuous functional, rules for performing limit transitions, delta-like sequences, etc. Special literature is devoted to these questions, in which one can find formulations and proofs of the corresponding theorems (see, for example, the book by V.S. Vladimirov "Generalized functions in mathematical physics", I.M. Gelfand and G.E.Shilov "Generalized functions and actions on them ", MS Agranovich" Generalized functions and Sobolev spaces ", MA Shubin" Lectures on the equations of mathematical physics "and many others). In this article, we will look at techniques for changing a variable in an argument of a generic function, multiplying by a locally integral function, and simplifying expressions.

ЛИНЕЙНОЙ ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ И ОБ УПРОЩЕНИИ ВЫРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Даужанов Аиназар Шынназарович [1], Турганбаева Айсанем Куанышбаевна [2]
Рахимбоев Мухторбек [3], Хиясова Айнура [4]
[1] Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета им. Бердаха.
[2,3,4] магистрант направление «Математический анализ», Каракалпакского государственного университета им. Бердаха.

ИСТОРИЯ СТАТЬИ

Принято: 20 апреля 2021 г.
Утверждено: 25 апреля 2021 г.
Опубликовано: 30 апреля 2021 г.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

АННОТАЦИЯ

Математическая строгая теория обобщённых функций содержит определение множества основных функций, определение непрерывного функционала, правила выполнения предельных переходов, дельта-образные

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

основные функции, локально-интегрируемые функции, обобщенные функции, регулярная обобщенная функция, функция, линейная замена переменных.

последовательности и т.п. Этим вопросам посвящена специальная литература, в которой можно найти формулировки и доказательства соответствующих теорем (см., например, книгу В.С. Владимирова «Обобщённые функции в математической физике», И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова «Обобщённые функции и действия над ними», М.С. Аграновича «Обобщённые функции и соболевские пространства», М.А. Шубина «Лекции об уравнениях математической физики» и многие другие). В настоящей статье мы рассмотрим методику замены переменной в аргументе обобщённой функции, умножение на локально-интегрируемую функцию и упрощение выражений.

Введение

Важность обобщённых функций в самой математике и её приложениях не нуждается в доказательствах. Возникновение обобщённых функций связано с именами многих математиков и физиков. Простейшая обобщённая функция $\delta-$функция использовалась Д. Максвеллом (1873), О. Хевисайдом (1898), П. Дираком (1926). Основы математической теории обобщённых функций были заложены С.Л. Соболевым (1939) и Л. Шварцом (1950). Важнейшие результаты в теории обобщённых функций был получен К. Фридрихсом (1940). Дальнейшие развитие в теории обобщённых функций имеются в работах И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова (1959), Н.Н. Боголюбова и О.С. Парасюка (1955-1960), В.С. Владимирова, Л. Хёрмандера, А. Земаняна, Г. Бремермана (1968-1971) и др.

В современном математическом анализе основным математическом аппаратом служат пространства Соболева и теория обобщённых функций Шварца.

Изложим некоторые определения и утверждения относительно обобщённых функций, которые будут использованы в дальнейшем [1, 3, 6].

1. Введем важное пространство основных функций D. Отнесем ко множеству $D = D(\mathrm{R})$ всевозможных функций $\varphi(x)$, определённых на всей числовой прямой R и обладающих следующими свойствами:

1)каждаяфункция $\varphi(x) \in C^{\infty}(R)-$ имеет производные всех порядков на всей числовой прямой;

2) для каждой функции $\varphi(x)$ существует интервал, вне которого она равна нулю.

Обозначим через X_{φ} множество всех точек x, в которых $\varphi(x) \neq 0$, а через $\overline{X_{\varphi}} -$ замыкание множества X_{φ}, т.е. $\overline{X_{\varphi}} -$ объединение множества X_{φ} и всех его предельных точек.

Множество $\overline{X_{\varphi}}$ называется носителем функции $\varphi(x)$ и обозначается

$$\operatorname{supp}\varphi(x) = \overline{X}_{\varphi} = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области G, обозначим через $D(G)$. Таким образом, $D(G) \subset D(\mathrm{R}^n) = D$.

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

2. Сходимость в D определяется следующим образом. Последовательность основных функций $\varphi_1, \varphi_2, .., \{\varphi_n(x)\}$ из D сходится к функции $\varphi(x)$ из D, если:

1) существует интервал $(-a, a)$, такой, что $\forall n \in N$:

$$supp\varphi_n(x) \in (-a, a);$$

2)$\forall k = 0,1,2,..$ последовательность производных $\left\{\varphi_n^{(k)}(x)\right\}$ равномерно в G сходится к $\varphi^{(k)}(x)$.

Обозначение: $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве D.

Функция $\varphi: R^n \to R$ называется основной, если $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема и $supp\varphi$ является ограниченным подмножеством в G.

Сделаем более ясным теперь, что приведённая построение в определенном смысле расширяет $R_{1,loc}$ —класс локально интегрируемых функций на числовой прямой. Этот класс состоит из функций f, обладающих свойством

$$\forall a, b \in \boldsymbol{R}(a < b) \Rightarrow f \in R_1[a, b]$$

Имеет место включение $R_1(\boldsymbol{R}) \subset R_{1,loc}$.

3. Каждой функции $f \in R_{1,loc}$ соответствует обобщённая функция $f \in D^{/}$, определённая равенством

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in D \qquad (0.1)$$

Пространство $D^{/}$ шире чем $R_{1,loc}$, существуют обобщённые функции, не являющиеся функционалами вида (0.1). Таким образом, осуществляется вложение $R_{1,loc} \subset D^{/}$.

4. Определим $\delta -$функцию. Всякую меру можно отождествить с линейным непрерывным функционалом на пространстве непрерывных функций, и заметим, что такой функционал для функции $\delta(x)$ действует по формуле

$$(\delta(x), f(x)) = f(0), \qquad (0.2)$$

где $f(x)$ любая непрерывная на отрезке функция, например, $f(x) \in C_{[-1,1]}$. Следовательно, функция $\delta(x)$ - это по определению, функционал на $C_{[-1,1]}$, сопоставляющий функции $f(x)$ её значение в точке 0.

$\delta -$функция представляет собой математическое выражение плотности единичной массы сосредоточенной в точке $x = 0$. Если такая масса сосредоточена в точке $x = a$, мы приходим к $\delta -$функции $\delta(a) = \delta(x - a)$, которая определяется равенством

$$(\delta(x - a), \varphi(x)) \equiv (\delta(x), \varphi(x + a) = \varphi(x + a)|_{x=0} = \varphi(a)$$

Возникает вопрос: соответствует ли любому линейно-непрерывному функционалу g локально интегрируемая функция $f \in L_{1,loc}(m.e. R_{1,loc})$, т.е. верно ли

$$g(\varphi) = (g, \varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)dx?$$

Ответ отрицательный. Функционалу $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ не соответствует никакая функция $f \in L_{1,loc}$, чтобы имело место $\int f(x)\,\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Следовательно, $(\delta, \varphi) \notin L_{1,loc}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.1. $\delta -$функцию можно представить как предел в пространстве $D^{/}$ последовательности регулярных обобщённых функций:

$$\forall\varphi(x) \in D: \lim_{a\to 0}(\delta_a(x), \varphi(x)) = \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)dx = (\delta, \varphi) =$$

$$\lim_{a\to +0}\delta_a(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ +\infty, x = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.2. Любую сингулярную обобщённую функцию можно представить как предел в пространстве $D^{/}$ последовательности регулярных обобщённых функций.

Другими словами, пространство обобщённых функций является пополнением пространства классических локально интегрируемых функций, т.е. получается путём добавления к пространству $R_{1,loc}$ всех предельных элементов в смысле слабой сходимости (в смысле обобщённых функции).

5. Для обычных функций $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ по самому определению можно говорить о значении $f(x)$ функции f в точке x. Для элемента f пространства $R_{1,loc}$ это уже не так ($f -$это класс функций, отличающихся между собой на множестве лебеговой меры нуль). Выбрав функцию – представителя класса, можно говорить о её значениях в точках. Для обобщённых функций утрачивается и такое понимание. Отметим, однако, что при рассмотренном выше вложении $R_{1,loc} \subset D^{/}$ по обобщённой функции (f, φ) можно восстановить значение f в её точках непрерывности.

Пространство обобщённых функций

Введём понятие функционала, лежащее в основе определения обобщённых функций.

1. Всякое отображение $f : D(G) \to R$ пространства основных функций во множество вещественных чисел называется ф у н к ц и о н а л о м.

Определение 1. Будем говорить, что на пространстве D задан функционал, если указано правило, по которому каждой функции $\varphi(x) \in D$ ставится в соответствие определенное число $f(\varphi)$.

Функционал также будем обозначать (f, φ).

Функционал f называется л и н е й н ы м, если для любых вещественных чисел a и b и любых основных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ из пространства D выполняется равенство

$$(f, a\varphi_1 + b\varphi_2) = a(f, \varphi_1) + b(f, \varphi_2)$$

2. Введём теперь понятие непрерывного функционала, определённого на пространстве D основных функций.

Определение 2. Функционал f, определённый на пространстве D, называется н е п р е р ы в н ы м, если для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n(x)\}$, сходящейся к какой-нибудь функции $\varphi(x) \in D(G)$, числовая последовательность (f, φ_n) сходится к числу (f, φ).

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
www.innacademy.uz

Теперь сформулируем центральное определение данной работы.

Определение 3. Обобщённой функцией называется линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций.

Значение функционала f на элементе $\varphi(x)$ пространства D, как и было оговорено, будем обозначать (f,φ).

Совокупность всех обобщённых функций на G образует линейное пространство и обозначается через $D^{/}(G)$.

3. В векторном пространстве $D^{/}$ обобщённых функций над основным пространством D дадим определение понятия сходимости.

Определение 4. Последовательность $\{f_n(x)\} \in D^{/}$ обобщённых функции называется сходящейся к обобщённой функции $f \in D^{/}$, если для любой функции $\varphi(x)$ из пространства D основных функции числовая последовательность (f_n,φ) сходится к числу (f,φ):

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi) = (f,\varphi), \forall\varphi \in D.$$

Заключение

Решение многих теоретических и практических задач тесно связано как с методологическим подходом, так и с используемым математическим аппаратом.

Теория обобщённых функций является мощным математическим аппаратом, позволяющим решать широкий класс задач, которые, вообще говоря, не поддаются решению методом классического математического анализа. Этот аппарат позволяет строго обосновать применяемые методы и полученные результаты и дает возможность построить и общую теорию.

Методика, которая легла в основу данной работы позволяет сформулировать правильное представление о таких понятиях, как основные и обобщенные функции, замена переменных в обобщенных функциях. Приведено большое количество примеров, связанные с обобщёнными функциями, которые построены из дельта-функции с помощью замен в аргументе и умножение на локально-интегрируемую функцию. Приведенные примеры дают представление значимости элементов теории обобщённых функций для их разрешимости. Теоретический материал статьи носит справочный характер и помогает преподавателям и студентам в подготовке к практическим занятиям, а также в овладении методами теории обобщённых функций при их самостоятельной работе над курсом.

Литературы:

1. Александров В.А. Обобщённые функции. Учебное пособие. Новосибирский государственный университет, 2005. 46с.
2. Аленицын А.Г., Грикуров В.Э. Обобщённые функции в математической

физике. СПбГУ, 2001. 64с.

3. Бутузов В.Ф., Бутузова М.В. Ряды и интеграл Фурье. Обобщённые функции. Учебное пособие. М., 2017. 60с.
4. Пожарский А.А. Методическое пособие. СПбГУ, 2015. 183с.
5. Попова Е.М., Чигирёва О.Ю. Методические особенности изложения темы «Обобщённые функции. Обобщённые производные. Дельта-функция Дирака» // Научно-методический электронный журнал «Концепт», 2018.
6. Даужанов А.Ш. Методические изложения элементов теории обобщённых функций // Научно-методический журнал «ILM SARCHASHMALARI», Ургенчский гос. университет. 2020. №10. С. 11-25.