EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

KOMBINATORIKAGA OID MASALALARNI YECHISH USULLARI

Imomnazarova Nurjaxon Toktaboyevna
University of business and science nodavlat universitetining matematika fani o‘qituvchisi
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.7905922

ARTICLE INFO
Received: 30th April 2023
Accepted: 07th May 2023
Online: 08th May 2023
KEY WORDS
Qoida, qo‘shish, ko‘paytirish, o‘rinlashtirish, o‘rin almashtirish, birlashmalar, formula, masala, element.

ABSTRACT
Ushbu maqola o'qituvchilarga metodik tavsiya sifatida bo'lib, matematikaning asosiy bo‘limlaridan biri kombinatorika haqida ma’lumot beradi. Maqolada kombinatorika qoidalari va 16 xil turli masalalar, ularning yechish usullari yozilgan. Maqola nafaqat o‘qituvchilarga, shuningdek o‘quvchilarga ham kombinatorika masalalarini tushunishda va yechishga yordam beradi. Maqoladagi xar bir masalani yechish uchun yo‘nalishlar berib o‘tilgan. Masalani mazmun jihatdan izohlab formulalarning qaysi biri orqali yechimini topish to‘g‘rida tavsiyalar berilgan. Kombinatorikaga oid dars jarayonida o‘qituvchi maqoladan ko‘rgazma sifatida foydalansa bo‘ladi. Makola matematikani o'qitish samaradorligini oshirishda xizmat qiladi.

Ilm-fan taraqqiy etayotgan hozirgi kunda ta’lim sifatini oshirishga e’tibor oshirilgan. Bu esa har bir ta’lim beruvchini o‘z ustida muntazam ishlashini taqazo qiladi. Matematika fani ham asrlar yoki o‘n yilliklar oralig‘ida emas yildan-yilga kengayib boryapti. Hozirda fanning kehgayishi, yangi tushunchalarning kiritilishi matematika o‘qitish metodikasida izlanishlar olib borish va innovatsion texnologiyalardan foydalanishni keng yo‘lga qo‘yishni talab qiladi. Quyida biz o‘rganadigan yangi bo‘limlardan biri bu kombinatorika bo‘lib, biz kombinatorikaga oid tushunchalarni va masalalalarini yechish usullariga to‘xtalamiz.

Kombinatorikaning umumiy qoidalari

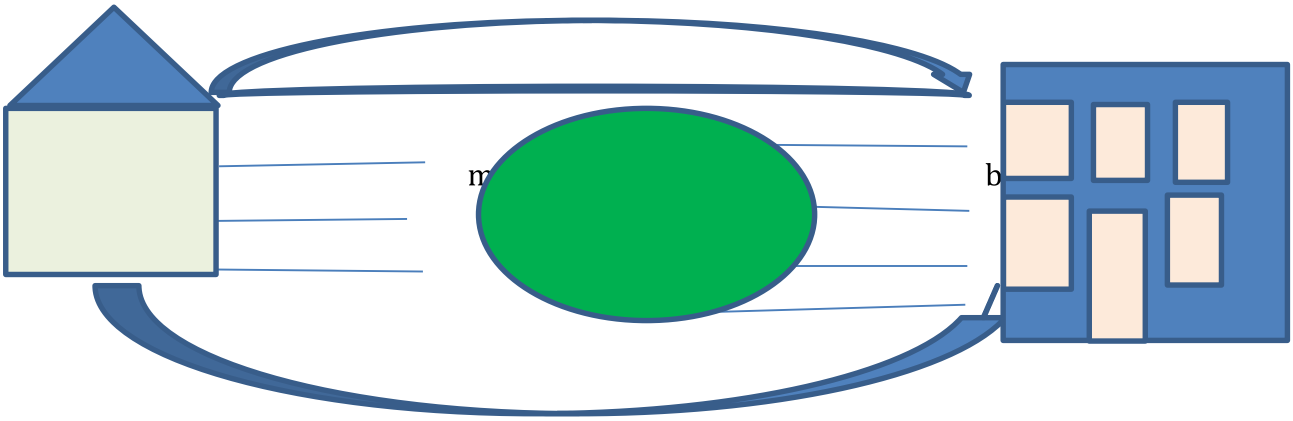
Kombinatorika- lotincha combinare-birlashtirish degan ma’noni bildiradi. Kombinator matematika — matematikaning chekli to‘plamlar ustida bajariladigan amallarni o‘rganadigan bo‘limi.

Kombinatorika masalalarini hal qilish asosida quyidagi ikkita qoida yotadi:

1. Qo‘shish qoidasi. *Agar biror A elementni m ta usul bilan, ikkinchi B elementni n ta usul bilan tanlash mumkin bo‘ib, bu usullar bir-birini rad etadigan bo‘lsa(ya’ni bo‘g‘liq bo‘lmasa) , u holda bu elementlardan birortasini m+n ta usul bilan tanlash mumkin.*

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

2. Ko‘paytirish qoidasi. *A gar A elementni m ta usul bilan va har bir bunday tanlashdan so‘ng B elementni n ta usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (A,B) elementlar juftini shu ko‘rsatilgan tartibda m*n ta usul bilan tanlash mumkin.*



Yuqoridagi rasmdan ko‘rinib turibdiki uydan bo‘qchaga to‘g‘ridan-to‘g‘ri olib boriladigan yo‘l uchta ekan, bu uchta yo‘l umuman bir-biriga bog‘liq emas.

Endi uydan boqchaga maydoncha orqali boradigan yo‘llarga e’tibor qaratamiz. Dastlab uydan maydonchaga boradigan birinchi yo‘limizni boqchagacha davom ettiramiz. Ko‘rib turganingizdek to‘rt xil yo‘l bilan borish mumkin ekan. Uydan maydonchaga boradigan qolgan ikki yo‘limizning har biri orqali to‘rt xil usul bilan borilyapti. Demak uydan maydonchaga boradigan uchta yo‘limizning har biri to‘rt xil usul bilan boqchaga olib borsa, maydoncha orqali jami 12 xil usulda borilarkan, ya’ni 3*4=12 (m*n).

1-masala. A punktdan B punktga 3 ta yo‘l, B punktdan C punktgaa esa 4 ta yo‘l olib boradi. A dan C ga B orqali nechta usul bilan safar qilish mumkin.

Yechilishi: Masala mazmunidan ko‘rinib turibdiki hodisalar o‘zaro bog‘liq. Demak biz kombinatorikaning ko‘paytirish qoidasidan foydalanamiz. Usullar sonini n ta desak, u holda n=3*4=12. O‘quvchiga yanada tushunarliroq bo‘lishi uchun esa A punktdan B punktga boradigan yo‘llarni 1,2,3 deb belgilasak, B punktdan C punktgacha bo‘lgan yo‘llarni a,b,c,d deb belgilaymiz. Endi ana shu C punktga olib boradigan har bir yo‘lni yozib chiqamiz. 1a,1b,1c,1d,2a,2b,2c,2d,3a,3b,3c,3d-natijada A punktdan C punktga 12 ta yo‘l orqali borilishi aniqlandi. **Javob:12**

2-masala. O‘qituvchi matematikadan yozma kontrol ishning bitta variantini tuzish uchun geometriyadan 4 ta, algebradan 8 ta va trigonometriyadan 3 ta masalaga ega. Agar variantga sanab o‘tilgan bo‘limlardan bittadan masala kirishi lozim bo‘lsa, bu variantni nechta usul bilan tuzish mumkin?

Yechilishi: Dastlab o‘quvchiga oddiy ko‘rinishda tushuntiramiz. Savollarni raqamlab yozib chiqamiz.

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

geometriya	algebra	trigonometriya
1	1	1
2	2	
3	3	2
4	4	
	5	3
	6	
	7	
	8	

2- rasm

Yuqoridagi rasmdagi ko‘k chiziqlarga e’tibor beramiz. Birinchi biletga geometriyaning birinchi savoli, algebraning birinchi savoli va trigonometriyaning birinchi savoli olindi. Ikkinchi biletga geometriya va algebraning birinchi savoli trigonometriyaning ikkinchi savoli olindi. Uchinchi biletga esa geometriya va algebraning birinchi savollari trigonometriyaning uchinchi savoli olindi. Rasmdagi qizil chiziqlar bilan birlashtirilgan raqamlar savollaridan bilet tuzamiz. Yana uchta bilet tuzdik. Jarayonni shu zaylda davom ettiramiz... . Natijada n=4*8*3=96 yechimga ega bo‘lamiz. 2-rasm o‘quvchi tasavvurini kengaytirish va masalani tushunishi uchun yordam beradi. Javob:96

3-masala. Har biri 6 komandadan iborat ikkita yarim final guruppadan finalga bittadan komanda chiqadi. Final matchi ishtirokchilarining turli variantlari nechta bo‘lishi mumkin?

Yechilishi: Har bir gruppada 6 tadan komanda bor.

1-gruppa	2-gruppa
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

3-rasm

1 guruppadan birinchi komanda va 2 gruppadan birinchi komanda finalga chiqsin-11 deb belgilaymiz. Umumiy yozamiz:

11,12,13,14,15,16;

21,22,23,24,25,26;

31,32,33,34,35,36;

41,42,43,44,45,46;

51,52,53,54,55,56;

61,62,63,64,65,66. Ixtiyoriy guruppadagi ixtiyoriy gruppa raqib guruppadagi komandalardan ixtiyoriy bittasi bilan finalga chiqishlar soni jami bo‘lib 36 xil variantda tuzilishi mumkin ekan.

$n=6*6=6^2=36$ J**avob:36**

4-masala. Yugurish musobaqasida 5 sportchi ishtirok etmoqda.Yugurish natijalariga ko‘ra o‘rinlar necha usulda taqsimlanishi mumkin?

Yechilishi: 5 sportchining ixtiyoriy bittasi 1dan 5 gacha oʻrinlarni bittasini olishi mumkin, u holda 5 sportchi 5tadan oʻringa ega boʻlsa jami 25 xil usulda taqsimlanishi mumkin. Qulay usulda tushuntirmoqchi boʻlsak, sportchilarni 1 dan 5 gacha raqamlab turli oʻrinlarga qoʻyib chiqamiz. **Javob:25**

1-oʻrin	2-oʻrin	3-oʻrin	4-oʻrin	5-oʻrin
1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

5-masala. 20 sahifali kitobning biror uch sahifasiga bittadan rasm joylashtirilishi kerak. Buni nechta usul bilan bajarish mumkin?

Yechilishi: masala shartiga koʻra rasmlar ixtiyoriy sahifaga bittadan , ya’ni 1,2,..,20 sahifadan 3 tasiga joylashtiriladi. Variantlarni qarab chiqamiz. Dastlab oddiy holda tushuntiramiz. 1 va 2 sahifani ixtiyoriy sahifa bilan bogʻlaymiz. 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129,...,1220-ushbu uchliklar sahifalar raqamlari. E’tibor bersak birinchi rasm jami 20 sahifaga qoʻyib chiqilsa, ikkinchi rasm 19 ta sahifaga qoʻyib chiqiladi, chunki birinchi rasm bitta sahifani band qilgan edi. U holda birinchi va ikkinchi rasmlarimiz ikkita sahifani band qilgani uchun uchinchi rasm joylashishiga 18 ta sahifa qoldi. Demak birinchi rasm hamma sahifada ishtirok etsa ikkinchisi 19ta sahifada uchinchisi 18 ta sahifada qatnashadi. Bu holat har bir sahifada bajarilgani uchun 20*19*18=6840 natijaga ega boʻlamiz.

Javob:6840

Oʻrinlatishlar

n ta turli elementdan k tadan oʻrinlatishlar deb, berilgan n ta elementdan olingan k ta elementni oʻz ichiga olgan barcha mumkin boʻlgan shunday gruppalarga aytiladiki, ular bir-birlari bilan yo elementlarining tarkibi bilan, yoki tartibi bilan farq qiladi. Oʻrinlatishlar takrorlanadigan va takrorlanmaydigan boʻladi.

n ta turli elementdan k tadan **takrorlanadigan** oʻrinlashtirishlar soni

$$\tilde{A}_n^k = n^k \quad (1)$$

formula yordamida topiladi.

n ta turli elementdan k tadan takrorlamasdan oʻrinlatishlar soni

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (2)$$

formula boʻyicha topiladi.

6-masala. 1,2,3,4,5,6,7 raqamlaridan nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechilishi: Koʻrsatilgan raqamlardan tuzilgan har bir uch xonali sonni berilgan yettita raqamdan olingan uchta raqamdan tuzilgan **takrorlanadigan** oʻrinlatish deb qaraymiz, chunki masala shartida raqamlari takrorlanmasin deyilmagan. (1) formula orqali hisoblaymiz n=7, k=3 ga teng boʻlgani uchun $A=7^3=343$ natijani aniqladik. Demak biz 1 dan 7 gacha bo'lgan raqamlar yordamida raqamlari takrorlanadigan 343 ta 3 xonali son tuzishimiz mumkin ekan. **Javob:343**

Agarda masala shartida raqamlari **takrorlanmasin** deyilsa u holda (2) formula yordamida hisoblaymiz.

A$=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{1*2*3*4*5*6*7}{1*2*3*4}=\frac{5*6*7}{1}$=210 ta raqamlari takrorlanmaydigan 3 xonali son tuzishimiz mumkin ekan. **Javob:210**

O'rin almashtirishlar

n ta turli elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar deb, n ta elementdan tuzilgan va bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan mumkin bo'lgan barcha guruhlarga aytiladi.

n ta turli elementdan **takrorlamasdan** o'rin almashtirishlar soni

P_n=n! (3)

formula bo'yicha aniqlanadi.

7-masala. 0,1,2,3 raqamlari yordamida raqamlari takrorlanmaydigan nechta turli 4 xonali son tuzish mumkin.

Yechilishi: Masala shartiga ko'ra 0,1,2,3 raqamlaridan 4 xonali sonlarni yozib chiqamiz. Dastlab son 0 bilan boshlanmasligini bilganimiz uchun1danboshlaymiz. 1230,1203,1023,1032,1302,1320;2130,2103,2013,2031,2310,2301; 3120.3102.3210,3201,3012.3021 – 0,1,2,3 raqamlari yordamida jami 18 ta raqamlari takrorlanmaydigan 4 xonali son tuzish mumkin ekan. Endi P_n=n! formuladan foydalanmoqchi bo'lsak to'rtta raqamdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni P_4=4! Ta bo'lgani uchun va ularda 3! ta o'rin almashtirish noldan boshlangani uchun izlanayotgan miqdor:

4!-3!=3*3!=1*2*3*3=18

Ushbu masalani tushuntirishning sodda usuli quyidagicha: to'rt xonali son uchun to'rtta katakcha chizamiz

Birinchi katakchamizga 1,2,3 raqamlarini yozishimiz mumkin , chunki 0 bilan boshlanadigan son yo'q. Birinchi katakchaga 1,2,3 raqamlaridan birortasini yozganimizdan so'ng ikkinchi katakchamizga ham yozish uchun 3 ta raqam qoldi. Chunki bitta raqamimiz birinchi katakchaga yozildi. Raqamlar takrorlanmasin deyilgani uchun navbatdagi xonaga yoziladigan raqamlar soni bittadan kamayib boradi. Demak 4 xonali son yozishimizda birinchi xonaga 3 ta raqamdan, ikkinchi xonaga ham 3 ta raqamdan, 3 xonaga 2 ta raqamdan, 4 xonani yozishda 1 ta raqamdan foydalanamiz. 3*3*2*1=18. Javob:18

3	3	2	1

8-masala. Son tasvirida har bir raqam bir marta uchraydi degan shartda 1,2,3,4,5,6 raqamlaridan 2 raqami bilan boshlanib 5 raqami bilan tugaydigan nechta turli 6 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechilishi: E'tibor beramiz masala shartida turli deyilyapti, demak raqamlari takrorlanmasligi kerak. U holda P_n=n! formuladan foydalanib P=6!=1*2*3*4*5*6=720 ta 6 xonali raqamlari takrorlanmaydigan son tuzish mumkin ekan. Bizning berilgan 6ta raqamimizdan bittasi 2 bo'lsa 720 ta sonning oltidan bir qismi 2 bilan boshlanadi-720/6=120. Agar son 2 bilan boshlansa uning oxirgi raqamlari 1,3,4,5,6- 5 ta raqam bilan yakunlanadi. 120 ta 2 bilan boshlanadigan 6 xonali sonning beshdan bir qismi 5 raqami bilan yakunlanadi. 120/5=24

Ushbu masalani yana bir usul bilan yechib koʻramiz. 6 xonali sonning boshidagi va oxiridagi raqamlari 2 va 5 oʻzgarmasa, u holda biz oʻrtadagi toʻrtta xonadagi sonlarning oʻrinlarini almashtirish yordamida topamiz. Biz 1,3,4,6 raqamlarimiz yordamida turli 4 xonali sonlarni tuzamiz: $P_4=4!=1*2*3*4=24$.

Koʻrinib turibdiki 1,3,4,6 raqamlaridan tuzilgan 4 xonali sonlarimiz oldiga 2, oxiriga 5 raqamlarini qoʻysak 24 ta boshi 2 bilan, oxiri 5 bilan tugaydigan 6 xonali son tuzish mumkin ekan**.**

Javob: $P_4=4!=24$

n ta turli elementdan **takrorlash** bilan, chunonchi birinchi tipdagi n_1 ta ta elementdan, ikkinchi tipdagi n_2 ta elementdan,..., n-tipdagi n_l ta elementdan tuzish mumkin boʻlgan oʻrin almashtirishlar soni

$$P_n(m_1,m_2,\dots,m_k)=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!} \quad (4)$$

formula yordamida hisoblanadi.

9-masala. 4 ta yashil, 5 ta koʻk, 6 ta qizil marjonni nechta usul bilan ipga tizish mumkin?

Yechilishi: $m_1=4$, $m_2=5$, $m_3=6$ va $n=m_1+m_2+m_3$ ekanligini bilgan holda yuqoridagi (4)formula yordamida yechimini topamiz.

$P(4,5,6)=\frac{(4+5+6)!}{4!5!6!}=\frac{15!}{4!5!6!}$=630630

Javob: P(4,5,6) =630630

10-masala. Yozilishida 1 raqamidan 2 marta, 2 va 3 raqamlaridan esa 3 marta foydalanib, nechta turli 8 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechilishi: (4) formulaga koʻra

$P(2,3,3)=\frac{(2+3+3)!}{2!3!3!}=$

$=\frac{8!}{2!3!3!}=\frac{1*2*3*4*5*6*7*8}{1*2*1*2*3*1*2*3}=\frac{40320}{72}=560$

Javob: P(2,3,3)=560

Birlashmalar

n ta turli elementdan k tadan tuzilgan birlashmalar deb, berilgan n ta elementdan olingan k ta elementni oʻz ichiga olgan va bir-biridan kamida bitta element bilan farq qiladigan barcha mumkin boʻlgan gruppalarga aytiladi.

n ta turli elementdan k tadan takrorlashsiz birlashmalar soni

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (5)$$

formula bilan aniqlanadi.

11-masala. Oʻn kishidan toʻrt kishilik guruhni nechta usul bilan tuzish mumkin?

Yechilishi: n=10, k=4 ga teng ekanligidan (5) formulaga koʻra $C^4_{10}=\frac{10!}{4!(10-4)!}$=210

Javob:C^4_{10}=210

12-masala. Hech bir uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan 8 ta nuqtadan nechta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?

Yechilishi: $C^2{}_8= \frac{8!}{2!(8-2)!}=56/2=28$

Javob: $C^2{}_8=28$

n ta turli elementdan takrorlashsiz birlashmalar soni shu n ta elementdan n-k tadan tuzilgan birlashmalar soniga teng.

$C_n^k=C_n^{n-k}$

n ta turli elementdan k tadan takrorlanadigan birlashmalar soni

$$C_n^m= \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}=C_{n+m-1}{}^m \qquad (6)$$

13-masala. 5 ta bir xil buyumni uch kishi orasida nechta usul bilan taqsimlash mumkin?

Yechilishi; $C_3{}^5=C_{3+5-1}{}^5=\frac{(3+5-1)!}{5!(5-1)!}=21$

Javob: $C_3{}^5=21$

14-masala. Olti qavatli uyning lifti 10 kishini birinchi qavatdan yuqoriga olib chiqadi. Har bir qavatda tushib qoladigan kishilar soni qavatlar bo‘yicha nechta usul bilan taqsimlanishi mumkin?

Yechilishi: $C_6{}^{10}=C_{6+10-1}{}^{10} =\frac{(6+10-1)!}{10!(6-1)!} =3003$

Javob: $C_6{}^{10}=3003$

15-masala. Agar xokkey komandasi sostaviga 3 hujumchi, 2 himoyachi va 1 darvozabon kirishi lozim bo‘lsa, 8 hujumchi, 5 himoyachi va 2 darvozavondan turli variantdagi nechta komanda tuzish mumkin?

Yechilishi: $S^3{}_8*S^2{}_5*2= \frac{8!}{3!(8-3)!}*\frac{5!}{2!(5-2)!}*2=1120$

Javob:1120

16-masala. Savatda 12 ta olma, 10 ta nok va 20 ta olxo‘ri bor. Ikki bolaning har biri kamida bu mevalardan kamida 4 tadan oladigan bo‘lsa, ular bu mevalarni o‘zaro nechta usul bilan bo‘lib olishlari mumkin?

Yechilishi: Dastlab mevalarni bolalar o‘rtasida taqsimlab chiqamiz. Masala shartida kamida 4 ta deyilgani uchun birinchi bola 4 ta olma olsa ikkinchisi 8 ta oladi. U holda quyidagilarga ega bo‘lamiz: 4+8=5+7= 6+6=7+5=8+4=12. Bolalar olmani 5 xil usulda taqsimlab olarkan. 10 ta nokni bolalar o‘rtasida taqsimlaymiz. 4+6=5+5=6+4=10 ta nokni 3 xil usulda taqsimlasharkan. 20 ta olxo‘rini ham taqsimlab chiqamiz. 4+16=5+15=6+14=7+13=8+12=9+11=10+10=11+9=12+8=13+7=14+6=15+5=16+4=20 ta olxo‘rini 13 xil usulda bo‘lib olishadi. Bolalar bir uch xil mevadan ham olishlari kerak bo‘lganligi uchun hodisalar o‘zaro bog‘liq. O‘zaro bog‘liq hodisalar kombinatorikaning ko‘paytirish qoidasi orqali topilishini yuqorida aytib o‘tdik.(2 masala) Masalamiz yechimi 5*3*13=195 ga teng

Javob: 5*3*13=195

References:

1. Yo.U. Soatov. Oliy matematika . Toshkent-1992 yil

2. В.А. Подолский, А.М. Суходский. Олий математикадан масалалар тўплами. Тошкент-1977 йил, -281 бет.

3. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

4. Риодан Ж. Введение в комбинаторный анализ.: перевод с английского. М.: Иностранная литература, 1963. -287 с.