EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685
www.in-academy.uz

ВВЕДЕНИЕ ТОПОЛОГИИ ЗАМЫКАНИЕМ МНОЖЕСТВА

Атамурадова Дилшода Равшанкуловна[1],
Дилмуратов Дамир Даулетмурат ули[2],
Аюубов Комилжон Мансуржон ўғли[3]
[1]Преподаватель кафедры “Алгебра, геометрия, математический анализ” ТГПУ имени Низами,
[2]Студент, ТГПУ имени Низами,
[3]Студент, ТГПУ имени Низами
https://doi.org/10.5281/zenodo.6480300

ИСТОРИЯ СТАТЬИ
Принято: 05 апреля 2022 г.
Утверждено: 10 апреля 2022 г.
Опубликовано: 15 апреля 2022 г.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
топологическое пространство, замкнутое множество, оператор замыкания, внутренность множеств, база топологии

АННОТАЦИЯ

В статье представлены методы введение в топологии. Приведены пояснительные примеры этих методов. Изложены задания для самообразования студентов.

Введение. Известно, что высшие учебные заведения страны постепенно переходят на кредитно-модульную систему. Главной особенностью этой системы является то, что основной упор делается на самостоятельное обучение при одновременном снижении нагрузки учащихся на учебных занятиях. В результате процесс обучения ориентирован на работу студента над собой, а профессорско-преподавательский состав ограничивается функцией предоставления готового материала и анализом самостоятельно изученным студентом материалов.

В данной статье описаны дидактические материалы для самостоятельного освоения студентами материалов курса общей топологии, таких как топологическая пространственная база данных, база точек. Была предпринята попытка написать материал статьи простым языком. Для усвоения изложенного в статье материала студенту не нужны базовые математические знания, знание аксиом определения топологии. При написании данной статьи использованы материалы и методы лекций профессора А.А.Заитова, прочитанных в Чирчикском педагогическом университете [1].

Под введением топологии на множестве X понимаем [2] выделение семейства τ его подмножеств, удовлетворяющего аксиомам $(T1)$ – $(T3)$. Тогда пара (X, τ) становится топологическим пространством [4, 5]. Кроме того, что выделение семейства, удовлетворяющего условиям $(O1)$ – $(O3)$, также равносильно выделению семейства τ, удовлетворяющего аксиомам $(T1)$ – $(T3)$ [1]. Ещё мы отметим, что если на множестве выделено семейство, удовлетворяющее условиям $(C1)$ – $(C3)$, то семейство, состоящее из всех дополнений элементов выделенного семейства, образует топологию на данном множестве.

Ниже рассмотрим и другие методы введения топологии.

Введение топологии замыканием множества. Пусть (X,τ) – топологическое пространство и M – некоторое подмножество X. Семейство всех замкнутых множеств пространства X, содержащих M, обозначим через C_{M}, т. е.

$$C_M = \{F \subset X : F \supset M, X\backslash F \in \tau\}$$

В силу свойства $(C1)$ замкнутых множеств имеем $C_M \neq \emptyset$ и согласно свойству $(C2)$ пересечение $\cap C_M$ замкнуто. Это пересечение обозначают через $\overline{M}$ или $[M]$, т. е.

$$[M] = \overline{M} = \cap C_M.$$

Очевидно, что $[M]$ – наименьшее множество, содержащее множества M. Множество $[M]$ называется *замыканием* множества M.

Задания. a) Для множеств A и B топологического пространства X докажите импликацию

$$A \subset B \Rightarrow [A] \subset [B]$$

b) Докажите, что множество A топологического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда $[A] = A$.

Наиболее важными свойствами оператора замыкания являются следующие:

$(CO1)$ $[\emptyset] = \emptyset$;

$(CO2)$ $A \subset [A]$, $\forall A \subset X$;

$(CO3)$ $[A \cup B] = [A] \cup [B]$, $\forall A, B \subset X$;

$(CO4)$ $\big[[A]\big] = [A]$, $\forall A \subset X$.

Задания. a) Доказать, что множества произвольного топологического пространства (X,τ) удовлетворяют свойства $(CO1)$ – $(CO4)$.

b) Постройте топологическое пространство, и укажите что для него справедливы свойства $(CO1)$ – $(CO4)$.

Одно из важных применений оператора замыканий приведено в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть даны множество X и некоторый оператор $[\cdot]$, ставящий в соответствие каждому множеству $M \subset X$ множество $[M] \subset X$, такое, что выполнены условия $(CO1)$ – $(CO4)$. Тогда семейство

$$\tau_{[\cdot]} = \{M \subset X : [X\backslash M] = X\backslash M\}$$

удовлетворяет аксиомам $(T1)$ – $(T3)$ определения топологии. Для каждого $M \subset X$ множество $[M]$ является замыканием множества M в топологическом пространстве $(X, \tau_{[\cdot]})$.

Такая топология $\tau_{[\cdot]}$ называется *топологией, порожденной оператором замыкания* $[\cdot]$.

Пример 1. Пусть $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Полагая

$$[A] = \begin{cases} A, & \text{если } A = \emptyset, \\ A \cup \{0\}, & \text{если } A \neq \emptyset \end{cases}$$

определим на X оператор $[\cdot]: X \to X$.

Задания. a) Доказать, что определенный таким образом оператор $[\cdot]$ удовлетворяет условиям $(CO1)$ – $(CO4)$.

b) Доказать, что для каждой точки $x \in X\backslash\{0\}$ множество $\{x\}$ открыто, но не замкнуто относительно

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

топологии, введенной этим оператором замыкания.

c) Доказать, что множество $\{0\}$ замкнуто в X относительно топологии, порожденной этим оператором замыкания.

d) Указать все замкнутые множества $A \subset X$ относительно топологии, порожденной этим оператором замыкания.

Введение топологии внутренностью множества. Пусть (X, τ) – топологическое пространство и M – некоторое подмножеств X. Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность $O_x \in \tau$ точки x такая, что $O_x \subset M$ [2].

Множество всех внутренних точек множества M называется *внутренностью* множества M и обозначается $Int_X M$ или $IntM$.

Задания. a) Для множеств A и B топологического пространства X докажите импликацию

$$A \subset B \Rightarrow Int\ A \subset Int\ B.$$

b) Докажите, что множество A топологического пространства X открыто тогда и только тогда, когда $Int\ A = A$.

c) Для множества A топологического пространства X докажите равенство

$$IntA = \cup \{U: U \in \tau, U \subset A\}$$

Операторы замыкания и внутренности связаны следующим равенством

$$IntA = X \backslash [X \backslash A].$$

здесь X – топологическое пространство, A – произвольное его подмножество.

Оператор Int взятия внутренности множества обладает следующими свойствами:

$(IO1)$ $IntX = X$;

$(IO2)$ $IntA = A$, $\forall A \subset X$;

$(IO3)$ $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$, $\forall A, B \subset X$;

$(IO4)$ $IntIntA = A$, $\forall A \subset X$.

Теорема 2. Пусть даны множество X и некоторый оператор Int, ставящий в соответствие каждому множеству $M \subset X$ множество $IntM \subset X$, такое, что выполнены условия $(IO1)$ – $(IO4)$. Тогда семейство

$$\tau_{Int} = \{M \subset X: IntM = M\}$$

удовлетворяет аксиомам $(T1)$ – $(T3)$ определения топологии. Для каждого $M \subset X$ множество $IntM$ является внутренностью множества M в топологическом пространстве (X, τ_{Int}).

Такая топология τ_{Int} называется *топологией, порожденной оператором внутренности* Int.

Пример 2. Пусть $X = \{0,1,2,3,4\}$ и $X_0 = \{0,1,2\}$. Полагая

$$IntA = \begin{cases} A, & \text{если } A = X, \\ A \cap X_0, & \text{если } A \neq X \end{cases}$$

определим оператор $Int: X \to X$.

Задания. a) Доказать, что определенный таким образом оператор Int удовлетворяет условиям $(IO1)$ – $(IO4)$.

b) Укажите все открытые множества пространства X.

c) Убедитесь в том, что все подмножества X_0 и всё множество X и только они открытые множества пространства X.

Пример 3. Рассмотрим множество

$$X = \mathbb{N} = \{1,2, \ldots, n, \ldots.\}$$

и семейство

$$\tau = \{A \subset X: (1 \notin A) \vee (|X \backslash A| < \infty)\}.$$

Задания. a) Установить, что (X,τ) – топологическое пространство.

b) Докажите, что для каждого $n \in X\backslash\{1\}$ множество $\{n\}$ открыто-замкнуто.

c) Докажите, что множество $\{1\}$ замкнуто, но не открыто.

d) Для каждого множества $A \subset X$ докажите следующее

$$[A] = \begin{cases} A, & \text{если } |A| < \aleph_0, \\ A \cup \{1\}, & \text{если } |A| = \aleph_0. \end{cases}$$

e) Для каждого множества $A \subset X$ докажите следующее

$$Int\ A = \begin{cases} A, & \text{если } |A| < \aleph_0, \\ A \cup \{1\}, & \text{если } |A| = \aleph_0. \end{cases}$$

Введение топологии базой. Пусть даны множество X и семейство β его подмножеств.

Теорема 3. Пусть семейство β подмножеств множества X удовлетворяет условиям $(B1)$ – $(B2)$. Пусть

$$\tau_\beta = \{\cup \beta' : \beta' \subset \beta\}.$$

Тогда семейство τ_β удовлетворяет аксиомам $(T1)$ – $(T3)$. Семейство β является базой топологического пространства (X, τ_β).

Топология τ_β называется *топологией, порождённой базой* β.

Пример 4. Рассмотрим $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – множество всех действительных чисел.

Согласно теореме 3, оказывается достаточно проверить задания a), т. е. для семейств β_e, $\beta_\rightarrow$ и β_d достаточно установить выполнения свойства $(B1)$ – $(B2)$ [3]. Тогда выполнение заданий b) вытекают из теоремы 3 [3].

Пример 4 показывает, насколько важна теорема 3.

Введение топологии системой окрестностей. Мы знаем, что семейство множеств, состоящее из объединения локальных баз v_x точек $x \in X$, т. е.

$$v = \bigcup_{x \in X} v_x = \left\{ \bigcup_{x,\alpha} : \alpha \in A_x, x \in X \right\}$$

называется системой окрестностей пространства (X,τ). Всякая система окрестностей обладает следующими свойствами:

$(NS1)$ для любой точки $x \in X$ множество v_x не пусто и для каждого $V_{x,\alpha} \in v_x$ имеем $x \in V_{x,\alpha}$;

$(NS2)$ если $x \in V_{y,\alpha} \in v_y$, то найдётся $V_{x,\beta} \in v_x$, что $V_{x,\beta} \subset V_{y,\alpha}$.

$(NS3)$ для каждой пары $V_{x,\alpha}, V_{x,\beta} \in v_x$ найдется такое $V_{x,\gamma} \in v_x$, что $V_{x,\gamma} \subset V_{x,\alpha} \cap V_{x,\beta}$;

Теорема 4. Пусть даны множество X и совокупность

$$v = \left\{ \bigcup_{x,\alpha} : \alpha \in A_x, x \in X \right\}$$

его подмножеств, обладающая свойствами $(NS1)$ – $(NS3)$. Пусть

$$\tau_v = \{\cup v' : v' \subset v\}.$$

Тогда семейство τ_v удовлетворяет условиям $(T1)$ – $(T3)$. Семейство v является системой окрестностей топологического пространства (X,τ).

Топология τ_v называется *топологией, порожденной системой окрестностей* v.

Пример 5. Рассмотрим замкнутую верхнюю полуплоскость $L = \{(x,y) : y \geq 0\}$ и прямую $L_1 = \{(x,y) : y = 0\}$. Положим $L_2 = L\backslash L_1$. Для каждого $(\xi, 0) \in L_1$ и $r > 0$ пусть

$$U((\xi,0),r) = \{(x,y) : (x-\xi)^2 + (y-r)^2 < r^2\}$$

Пусть, далее

$$U_i(\xi,0) = U\left((\xi,0), \frac{1}{i}\right) \cup \{(\xi,0)\}, i = 1,2,\ldots$$

Для каждого $(\xi,\zeta) \in L_2$ и $r > 0$ пусть

$$U((\xi,\zeta),r)=\{(x,y):(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2 < r^2, \zeta \geq 0\},$$

$$U_i(\xi,\zeta)=U\left((\xi,\zeta),\frac{1}{i}\right), i=1,2,\ldots$$

Задания. a) Установить, что совокупность

$$v=\{U_i(\xi,\zeta):(\xi,\zeta)\in L, i\in\mathbb{N}\}$$

обладает свойствами $(NS1)$ – $(NS3)$.

b) Доказать, что множество L_1 замкнуто в топологическом пространстве (L,τ_v).

Топологическое пространство (L,τ_v) называется *плоскостью Немыцкого*.

Литературы:

1. **А.А.Заитов.** Геометрия. Методы введения топологии. Электронная платформа Чирчикского государственного института. 2020, 6 стр.

2. *Д.Р.Атамурадова. Рекомендации по самостоятельному изучению темы «Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества». //*Научный вестник Ташкентского государственного педагогического университета. 2020, № 12, стр. 271-274.

3. *Д.Р.Атамурадова, А.Н.Мадреймова. База топологического пространства. //Илм сарчашмалари. 2021 йил №9,стр.22-24.*

4. **T.F.Jo`rayev.** Topologiyaga kirish. – Toshkent, “Tafakkur-Bo’stoni”, 2012. – 240 b.

5. **Н.Бурбаки.** Общая топология. Основные структуры. – М., 1958. – 324 с.

6. **A.Ya.Narmanov, A.S.Sharipov, J.O.Arslonov.** Differensial geometriya va topologiya kursidan masalalar to`plami.-Toshkent “Unversitet” 2014.-11-15c

7. **Энкелькинг Р.** Общая топология. – М.: Мир, 1986. – с.752.

8. **Шварц А.С.** Квантовая теория поля и топология.- М.: Науке,1989. – с.400

9. **Фоменка А.Т., Фукс Д.Б.** Курс геомотопической топологии. М.: Наука, 1989.- с.529

10. **Куратовский К.** Топология.- М.: мир, 1966. I-с.594

11. **Куратовский К.** Топология.- М.: мир, 1966. II-с.624