КОШИНИНГ ИНТЕГРАЛ ФОРМУЛАСИ

Туропова Соҳиба Джуманазаровна
Термиз давлат университети Физика-математика факултети
Математик анализ кафедраси ўқитувчиси
https://doi.org/10.5281/zenodo.7482823

ARTICLE INFO
Received: 14th December 2022
Accepted: 24th December 2022
Online: 25th December 2022
KEY WORDS
Комплекс текислик соҳа, Кошининг интеграл формуласи, Голоморф, Коши типидаги интеграл, даражали қатор, Тейлор қатори, текислик, эгри, чизиқ.

ABSTRACT
Ушбу мақолада комплекс ўзгарувчили функциялар назариясидаги интегралларни ҳисоблаш бўйича услубий кўрсатмалар берилган. Коши интеграл формуласи келтирилган ва унга доир мисоллар ечиб кўрсатилган.

Комплекс текислик C да чегараси тўғриланувчи чизиқ бўлган чегараланган D соҳани қарайлик. Кузатувчи бу соҳа чегараси ∂D бўйлаб ҳаракат қилганда соҳа ҳар доим чап томонда қолсин.

1-Теорема. Агар $f(z)\in O(D)\cap C(\overline{D})$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\begin{cases} f(z), & агар \;\; z\in D \;\; булса \\ 0, & агар \;\; z\notin \overline{D} \;\; булса \end{cases} \qquad (1)$$

тенглик ўринли бўлади.

Одатда (1)-формула Кошининг интеграл формуласи дейилади. Бу формула $f(z)$ нинг $z\in D$ нуқтадаги қийматини чегарадаги қийматлар билан боғлайдиган формуладир.

1-Мисол. Ушбу

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4}$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ эгри чизиқ C текисликнинг $\pm 2i$ нуқталаридан ўтмайдиган ихтиерий ёпик чизиқ.

◁ Фараз қилайлик, γ ёпиқ чизиқ билан чегараланган тўплам D бўлсин.

а) $\pm 2i \notin \overline{D}$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2+4} \in O(\overline{D})$$

бўлиб, Кошининг интеграл теоремасига кўра

$$\oint_\gamma \varphi(z)dz = \oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4} = 0$$

бўлади.

б) $+2i \notin D; -2i \notin \overline{D}$ бўлсин. Бу ҳолда, аввало интеграл остидаги функцияни

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}$$

кўринишида ёзиб оламиз. Унда

$$f(z) = \frac{1}{z+2i} \qquad , a = 2i$$

лар учун 1-теореманинг шартлари бажарилганлиги сабабли (1) формулага кўра

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4} = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-2i}dz = 2\pi i \cdot f(2i) = \frac{2\pi i}{2i+2i} = \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

в) $-2i \in D, \quad 2i \notin \overline{D}$ бўлсин. Бунда юқоридаги б) ҳолдагига ўхшаш мулоҳаза юритиш билан топамиз:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4} = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{z-2i}\Big|_{z=-2i} = -\frac{\pi}{2}.$$

г) $2i \in D, \ -2i \in D$ бўлсин. Бу ҳолда, аввал интеграл остидаги функцияни содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i}\right).$$

У ҳолда

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z^2+4} = \frac{1}{4i}\left[\oint_\gamma \frac{dz}{z-2i} - \oint_\gamma \frac{dz}{z+2i}\right] = \frac{1}{4i} \cdot 2\pi i(1-1) = 0$$

бўлишини топамиз ▷

(1) формуладаги $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ интегралга Коши интеграли дейилади. Коши интегралида ∂D контур соҳа чегараси бўлиб, $f(\xi)$ функция D соҳада голоморфдир. Энди, фараз

қилайлик, C текисликда ихтиерий тўғриланувчи Г контур ва Г да аниқланган ҳамда узлуксиз $f(\xi)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда ушбу

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

интегралга Коши типидаги интеграл дейилади.

2-Теорема. Коши типидаги интеграл C\Г соҳада $F(z)$ функциясини аниқлаб, бу функция ушбу хоссаларга эгадир:

а) $F(z)$ функция C\Г да голоморф,

б) $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$,

в) $F(z)$ функциянинг исталган тартибли ҳосиласи $F^{(n)}(z)$ мавжуд ва

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

тенглик ўринли.

Натижа. Голоморф функция исталган тартибли ҳосилага эгадир.

Ҳақиқатан ҳам, голоморф функцияни Коши интеграли ёрдамида ифодалаш мумкин. Коши интегралининг исталган тартибли ҳосиласи мавжудлигидан берилган функция ҳам исталган тартибли ҳосилага эга:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi \qquad (11)$$

2-Мисол. Ушбу

$$\oint_{\gamma}\frac{e^{2z}}{(z+3)^4}dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда γ чизиқ C текисликдаги $z=-3$ нуқтани ўз ичига оладиган ихтиерий ёпиқ контур.

◁ γ контур билан чегараланган соҳани D деб белгилаймиз. Равшанки, $f(z)=e^{2z}$ функция ва D соҳа учун 2-теореманинг шартлари бажарилади. Унда (11)-формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\oint_{\gamma}\frac{e^{2z}}{(z+3)^4}dz=\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z+3)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\cdot f'''(-3)=$$

$$=\frac{2\pi i}{6}\cdot 2^3\cdot e^{-6}=\frac{8\pi i}{3e^6}. \qquad \triangleright$$

4^0. Даражали қаторлар.

Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad (12)$$

қаторга даражали қатор дейилади (бунда $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ ҳамда а-комплекс сонлар).

Агар (12)-қаторда $z-a=\xi$ дейилса, у (12) қатор $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ кўринишдаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (13)$$

даражали қаторга келади. Бинобарин, шу кўринишдаги қаторларни ўрганиш биз учун етарли бўлади.

1-Теорема. (Абель теоремаси) Агар даражали қатор z нинг $z = z_0 (z_0 \neq 0)$ қийматида яқинланувчи бўлса, у ҳолда қатор

$$\{z \in C : |z| < |z_0|\}$$

доирада абсолют яқинланувчи бўлади. Агар (13)-қатор z нинг $z = z_1$ қийматида узоқлашувчи бўлса, у ҳолда қатор

$$\{z \in C : |z| > |z_1|\}$$

тўпламда узоқланувчи бўлади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси

$$\bigcup = \{z \in C : |z| < r\}$$

доирадан иборат бўлиб, қаторнинг яқинлашиш радиуси r ушбу

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (14)$$

Коши-Адамар формуласидан топилади.

(13)-даражали қатор ўзининг яқинлашиш соҳасига тегишли бўлган ихтиерий

$$\{z \in C : |z| \leq \rho\}, \quad \rho < r$$

ёпиқ доирада текис яқинлашувчи бўлади.

Функцияларни даражали қаторларга ёйиш қаторлар назариясидаги муҳим масалалардан ҳисобланади. Бу масала қуйидаги теорема ёрдамида ҳал этилади.

2-Теорема. Агар $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳада голоморф бўлса, у ҳолда D соҳадаги ихтиерий

$$U = \{z \in C : |z-a| < r\} \qquad (\forall a \in D)$$

доирада $(U \subset D)$ уни даражали қаторга ёйиш мумкин:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n . \qquad (15)$$

Бу ерда c_n -коэффициентлар

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad , \; 0<\rho<r, \quad (n=0,1,2...) \tag{16}$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.
Одатда, коэффициентлари (16)-тенгликлар ёрдамида аниқланадиган (15)-қаторга Тейлор қатори дейилади.

Амалиётда кўпчилик масалаларни ҳал қилишда элементар функцияларнинг Тейлор қаторига ёйилмаларидан фойдаланилади:

1) $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1.$$

2) $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| \in C.$$

3) $$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad , \qquad z \in C.$$

4) $$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \qquad z \in C.$$

5) $$shz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad , \qquad z \in C.$$

6) $$chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \qquad z \in C.$$

7) $$(1+z)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} z^n \quad , \qquad |z|<1.$$

8) $$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad , \qquad |z|<1.$$

3-Теорема. Айтайлик, $U = \{z \in C : |z-a| < r\}$ доира берилган бўлиб, $f(z) \in O(U)$ *ва* $M = \max\limits_{z \in \partial U} |f(z)|$ бўлсин. У ҳолда $f(z)$ функциянинг a нуқта атрофидаги Тейлор қатори

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$$

коэффициентлари учун ушбу

$$|c_n| \le \frac{M}{r^n} \qquad (n=0,1,2,...) \tag{17}$$

Коши тенгсизликлари ўринли бўлади.

5⁰. Голоморф функцияларнинг хоссалари.

1-Теорема. Агар $f(z)$ функция D соҳада голоморф бўлса, у ҳолда $\forall n \in N$ учун $f^{(n)}(z)$ мавжуд ва у D соҳада голоморф бўлади.

2-Теорема. (Лиувилль теоремаси) Агар $f(z)$ функция бутун текислик C да голоморф бўлиб, чегараланган $(|f(z)| \leq M)$ бўлса, у ҳолда $f(z) \equiv const$ бўлади.

Фараз қилайлик, $f(z)$ функция бирор $a \in C$ нуқтанинг атрофида голоморф бўлсин. Агар $f(a)=0$ бўлса, а сони $f(z)$ функциянинг ноли дейилади. Агар $f(a)=f'(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$ бўлиб, $f^{(n)}(a) \neq 0$ бўлса, а сони $f(z)$ функциянинг n-тартибли ёки n каррали ноли дейилади. Хусусан, $n=1$ да а оддий ноль дейилади.

Агар $f(z)$ функция $z=\infty$ да голоморф бўлиб, $f(\infty)=0$ бўлса, ∞ нуқта функция ноли дейилади. Функциянинг бундай нолининг тартиби

$$g(z)=f(\frac{1}{z})$$

функциянинг $z=0$ нуқтадаги ноли тартиби билан аниқланади.

3-Теорема. Агар $f(z)$ функция $(f(z) \neq 0)$ $a \in C$ нуқтанинг атрофида голоморф бўлиб, а сон функциянинг n–тартибли ноли бўлса,

$$f(z)=(z-a)^n \varphi(z)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $\varphi(z)$ функция а нуқтанинг атрофида голоморф ва $\varphi(a) \neq 0.$

4-Теорема. (ягоналик теоремаси) Айтайлик, $f(z)$ ва $g(z)$ функциялар $D \subset C$ соҳада голоморф бўлиб, камида битта лимит нуқтага эга бўлган $E \subset D$ тўпламда $f(z)=g(z)$ бўлсин. У ҳолда барча $z \in D$ лар учун $f(z) \equiv g(z)$ бўлади.

5-Теорема. (модулнинг максимум принципи) Агар $f(z)$ функция $D \subset C$ соҳада голоморф бўлиб, унинг модули $|f|$ бирорта ички $z_0 \in D$ нуқтада (локал) максимумга эришса, у ҳолда $f(z) \equiv const$ бўлади.

References:

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.Н. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978, -269 с.
2. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения типа свертки с разрывными предсимволами. Сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. (Мицниереба. Тбилиси 1978).