EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

KVADRATIK STOXASTIK OPERATORNING BITTA KONSTRUKTSIYASI HAQIDA

[1]Meyliyev Xabibulla Jamolovich,
[2]Rasulova Moxira Sa'dullayevna,
[3]Poshokulova Mohigul Kaxramonovna
Qarshi irrigatsiya va agrotexnologiyalar institute.
https://doi.org/10.5281/zenodo.7466610

ARTICLE INFO
Received: 10th December 2022
Accepted: 20th December 2022
Online: 21th December 2022
KEY WORDS

ABSTRACT
Qandaydir biologik populatiyatsiyani yani, organizimlarni bir-biri bilan yopiq munosabatini qaraymiz. Faraz qilaylik maxsuslik populatiyatsiyaga kiruvchi har bir maxsuslik qandaydir yagona n ta har xillikdan 1,2,3,...,n bittasida yotsin.

Qandaydir biologik populatiyatsiyani yani, organizimlarni bir-biri bilan yopiq munosabatini qaraymiz. Faraz qilaylik maxsuslik populatiyatsiyaga kiruvchi har bir maxsuslik qandaydir yagona n ta har xillikdan 1,2,3,...,n bittasida yotsin.Har xilliklar shkalasi (belgilar, fenotiplar, genotiplar) shunday bo'lishi kerakki har xillikning ota-onasi (yani yaratuvchisi) ***i*** va ***j*** keyingi avloddan avlodga o'tishdagi birinchi bosqichda har xillik ***k*** ni bir qiymatli ehtimol bilan aniqlasin. Bu ehtimollni (avlodgan avlodga o'tish koeftsiyntini) $p_{ij,k}$ orqali belgilaymiz. O'z-o'zidan ma'lumki bu holda qo'ydagi shartlar bajariladi:

$$p_{ij,k} \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1$$

hamma natural i, j, k lar uchun.

Populatiyatsiya qancha katta bo'lsa, u holda ehtimol sifatida chastotani olish mumkin. U holda uning holatini $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ har xillik ehtimoli sifatida olish mumkin.yani x_i populatiyatsiyadagi *i* har xillik bo'lagi. U holda har bir tayinlangan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ holat uchun ota –onalar juftlig i va j $x_i x_j$ ehtimollik bilan hosil bo'ladi, binobarin, avloddan-avlodga o'tishdagi keyingi bosqichida to'la ehtimollik

$$x_k' = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j \tag{1}$$

fotmula orqali ifodalanadi.

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n): \ x_i \geq 0, \quad \text{i=1,2,...,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$ to'lam $n-1$

-

o'chovli simpleks deb ataladi. O'z-o'zidan ma'lumki $\sum_{k=1}^{n} x_k^{'} = 1$ va $x_k^{'} \geq 0$ bo'ladi. U holda (1) akslantirish S^{n-1} simpleksni o'zini oziga akslantiruvchi kvadratik stoxastik operator deb ataladi. Matematik modullar ichida moduli kvadratik operatorlar bo'ladiganlari asosiy rol o'ynaydi [1,7,8].

Kvadratik operatorlarda asosi masalasi kvadratik operatorlarning traektoriyasini o'rganishdan iboratdir. Bu muammo juda ko'p ilmiy ishlarda keltirilgan. [2,3,4,9]; Kvadratik operatorlarning ergodik xossalari o'rganish [4,5] imiy ishlarda keltirilgan. [4,6] Ilmiy ishlarda kvadratik operatorlarga aloqador bo'lgan kvadratik prosseslarning sinfi aniqlanan. Xuddi shunday chiziqli operatorlarga taluqli markov prosseslari ham aniqlangan.

Bu maqolada kvadratik stoxastik operatorlarning umumiy konstruksiyasini keltiramiz.

Faraz qilaylik (Λ, L) karrali qirrasiz davriysiz chekli graf bulsin. Bu erda Λ - grafning uchlari to'plami, va L-qirralar to'psinlamidir.

Φ -esa chekli bo'lgan allellar to'plami bolsin. Akslantirish $\sigma: \Lambda \to \Phi$ katak deb ataladi. Ω- orqali hamma kataklar fazosini belgilaymiz va $S(\Lambda, \Phi)$ Ω chekli to'plamda aniqlangan hamma ehtimolli taqsimotlar to'plami. $S(\Lambda, \Phi)$ simpleksni o'zini o'ziga akslantiruvch Kvadratik stoxastik operator quydagi ko'rinishda aniqlanadi. Λ_i -lar (Λ, L)-grafning hamma bog'liq bo'laklari to'plamidir, i=1,2,3,…,n. Ixtiyoriy ikkita katak uchun $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega$ lar uchun

$$A(\sigma_1, \sigma_2) = \{x \in \Lambda: \ \sigma_1(\text{x}) = \sigma_2(\text{x}) \}$$

va $\hat{A}(\sigma_1, \sigma_2) = \dot{\bigcup}_{J: A(\sigma_1,\sigma_2) \cap \Lambda_J \neq \emptyset} \Lambda_J$

Agar $\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda

$$\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left\{\sigma \epsilon \Omega: \sigma_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_{1_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)}} \ yoki \ \sigma_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_{2_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)}}\right\},$$

$\hat{A}(\sigma_1, \sigma_2) = \emptyset$ bo'lgan hol uchun

$$\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left\{\sigma \epsilon \Omega: \sigma_{\Lambda_j} = \sigma_{1_{\Lambda_j}} \ yoki \ \sigma_{\Lambda_j} = \sigma_{2_{\Lambda_j}}, \quad j=1,2,3...,n.\right\},$$

Faraz qilaylik $\mu \in S(\Lambda, \Phi)$ - Ω da aniqlangan $\mu(\sigma) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi qandaydir ehtimolli o'chov bo'lsin, ixtiyoriy $\sigma \in \Omega$ katak uchun avloddan- avlodga o'tish koeffisenti $P_{\sigma_1 \sigma_2, \sigma}$ ni quydagicha aniqlaymiz:

$$p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \begin{cases} \frac{\mu(\sigma)}{\mu\left(\Omega\left(\Lambda,\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)\right)} \ agar \ \sigma\epsilon\Omega\left(\Lambda,\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right) \\ 0 \quad qolgan\ hollar\ uchun \end{cases} \quad (2)$$

$S(\Lambda,\Phi)$ simpleksda harakat qiluvchi berilgan avloddan avlodga o'tish (2) koeffisenti yordamida qurilgan kvadratik stoxastik operator V quydagicha aniqlanadi: ixtiyoriy $\lambda \in S(\Lambda,\Phi)$ o'lchov uchun $V\lambda = \lambda^{'} \in S(\Lambda,\Phi)$ o'lchov ixtiyoriy katak $\sigma \in \Omega$ uchun

$$\lambda^{'}(\sigma) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2\in\Omega} P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}\lambda(\sigma_1)\lambda(\sigma_2) \quad (3)$$

Tenglik orqali ifodalanadi.

Hech qanday qeyinchiliksiz avloddan -avlodga o'tish koeffisenti quydagi shartlarni qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

$$P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} \geq o, \quad \sum_{\sigma\in\Omega} P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = 1 \ \text{è} \ \mathrm{P}_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \mathrm{P}_{\sigma_2\sigma_1,\sigma}$$

hamma $\sigma_1,\sigma_2,\sigma \in \Omega$ lar ushun.

Avloddan avlodga o'tish koeffisenti (2) (Λ,L) grafning strukturasi, allellar to'olami (spenlar) Φ va μ o'lchovning tanlanishiga bog'liq boladi.

Ta'rif. Kvadratik operator (3) Voltero kvadratik operator deyiladi, agarda avloddan avlodga o'tish koeffisenti qo'ydagichaa niqlangan bo'lsa:

$$p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \begin{cases} noldan\ farqli\ agar\ \sigma = \sigma_1 yoki\ \sigma = \sigma_2\ bo'lsa \\ 0 \quad bulsa\ qolgan\ hollar\ uchun \end{cases}$$

Teorema1. Agar $|\Phi| > 1$ va $|\Lambda| > 1$ bo'lganda (3) kvadratik stoxastik operator Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operator bo'lishi uchun (Λ,L) -grafning bog'liq graf bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik (Λ,L) -graf bog'liq graf bo'lsin:

Agar $A(\sigma_1,\sigma_2) = \Lambda$ bo'lsa, u hold o'z-o'zidan ma'lumki, $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)) = \{\sigma_1\}$ bo'ladi. Agar $A(\sigma_1,\sigma_2) \neq \Lambda$ bo'lsa va $A(\sigma_1,\sigma_2) \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda $\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2) = \Lambda$ bo'ladi, bu erdan $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)) = \{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligi kelib chiqadi. oxirida, agar $\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2) \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda girafning bog'liqligidan $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)) = \{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligi kelib chiqadi, bundan esa $\sigma \neq \sigma_1, \sigma \neq \sigma_2$ lar uchun $P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = 0$ ligi kelib chiqadi, yani unga mos keluvchi kvadratik stoxastik operator Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operatordir.

Endi faraz qilaylik kvadratik stoxastik operator (3) Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operator bo'lsin. U holda ixtiyoriy σ_1,σ_2 lar uchun μ o'lchov musbat zichlikkadagi o'lchov bo'ladi va $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)) = \{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligiga ega bo'lamiz, bu esa (Λ,L) grafning bog'liqligini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

$\sigma(x)$ larning mumkin bo'lgan qeymatlari va [3] stat mexanika masalalatidan Φ fazoning ko'rinishini mumkin qadar coddalashtirish yoki qeyinlashtirish mumkin. [1] biologik adabiyotlardan shu narsa malumki, ixtiyoriy gen allellarning har xil ko'rinishda mavjud bo'lishi mumkin. Populyatsiyada A allelni "normal" yoki "sakroq" deb ataluvchi tipdagisiga kengaytiramiz, qolgan formalari mutant α allellar sifatida qaraladi.

Mutant allellarni tasir qildirib $\Phi=\{A,\alpha\}$ ikkita nuqtadan iborat bo'lgan holni qaraymiz.

Binomiyal taqsimot yordamida qurilgan Kvadratik stoxastik operatorlar

Faraz qilaylik $|\Lambda|=n$ va $\Phi=\{A,\alpha\}$ bo'lsin. Ixtiyoriy katak $\sigma\in\Omega$ uchun σ katakdagi(yani "yutuqlar" soni) $\mu_\alpha(\breve{\alpha}_\iota)=C_n^i p^i q^{n-i}$ (4)

A allellar sonini $n_A(\sigma)$ -orqali belgilaymiz va μ_α o'lchovni на Ω da xuddi binomiyal taqsimot kabi beramiz:

$$\mu_\alpha(\sigma)=p^{n_A(\sigma)}q^{n-n_A(\sigma)}$$

Bu erda $p\geq 0$, $q\geq 0$ $p+q=1$ va $p/q=\alpha$ dir. Agar $p=q$ bo'lganda,yani $\alpha=1$ bo'lganda, o'lchov μ_1 Ω da normal taqsimotga aylanadi. Faraz qilaylik (Λ,L) -grafning qirralari to'plami bo'sh to'plam bo'lsin, yani, Λ tutash chziqlarni ozida saqlamasin.. Bu holda $n_A(\sigma_1)=n_A(\sigma_2)$ shartni qanoatlantiruvchi $\alpha_1 va\ \alpha_2$ kataklarni solishtirib $\Omega=\{\breve{\alpha}_1,\breve{\alpha}_2,\breve{\alpha}_3\ldots,\breve{\alpha}_k,$ bu erda $\alpha_i-n_A(.)=i$ shartni qanoatlantiruvchi kataklar to'plami} kataklar fazosini hosil qilamiz. Bu erda taqsimot quydagicha aniqlanadi:

Faraz qilaylik $\tilde{V}_\alpha$ - (4) taqsimot yordamida qurilgan

$$S(\Omega)=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n):x_i\geq 0,\ \ i=\overline{0,n}\ ,\ \ \sum_{i=1}^n x_i=1\}$$

sipleksda harakat qiluvchi kvadratik stoxastik operator bo'lsin.

Agar avloddan -avlodga o'tish qoidalari Mendel qoidalareini qanoatlantirsa, du qoidalar yordamida qurilgan kvadratik operatorlar Mendel kvadratik operatorlar deyiladi[1]. Bir nechta kvadratik operatorlar yordamida qurilgan modellarni qaraymiz.

Ko'riladigan misollarning hammasida $p=q=1/2$ bo'lib, unga mos keluvchi graf qirrasiz $|\Lambda|$=n grafdir.

1.n=1 bo'lgan hol.Avloddan - avlodga o'tish modellari 71 yillarda Elston va St'yuartlar tomonidan[1] taklif qilingan.Ota va onasidan keyingi avlodga o'tish belgilari ehtimolning uchta ko'rsatkichi yordamida amalga oshriladi:

$p_{AA,A}$ -AA genotipli ота onadan bolasiga A allelni o'tish ehtimolidir

$p_{Aa,A}$ - Aa genotipli ота onadan bolasiga A allelni o'tish ehtimolidir

$p_{aa,A}$ -aa genotipli ота onadan bolasiga A allelni o'tish ehtimolidir

Va hakozo $p_{\ldots,a}=1-p_{\ldots,A}$.

EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

Faraz qilaylik x_1 va x_2 –chastotalar mos ravishda A va α larning chastotalari bo'lsin. U holda ixtiyoriy $(x_1, x_2) \in S^1$ lar uchun kvadratik stoxastik operatorlar quydagicha aniqlanadi, xuddi shunday birinchi avloddan keyingi avlodga o'tishda allellar chastotasi (1) formula yordamida aniqlanadi :

$$\begin{cases} x_1' = p_{AA,A}x_1^2 + 2p_{Aa,A}x_1x_2 + p_{aa,A}x_2^2 \\ x_2' = p_{AA,a}x_1^2 + 2p_{Aa,a}x_1x_2 + p_{aa,a}x_2^2 \end{cases} \quad (5)$$

Mos keluvchi gepotezalar yordamida avloddan - avlodga o'tishning Mendel tipidagi ehtimoli qo'ydagi ko'rinishda topiladi:

A va A dan A ni hosil bo'lishi $P_{AA,A}=1$
A va A dan α ni hosil bo'lishi $P_{AA,\alpha}=0$
A va A dan A ni hosil bo'lishi $P_{A\alpha,A}=1/2$
A va A dan α ni hosil bo'lishi $P_{A\alpha,\alpha}=1/2$
A va A dan A ni hosil bo'lishi $P_{\alpha\alpha,A}=0$
A va A dan α ni hosil bo'lishi $P_{\alpha\alpha,\alpha}=1$
Shunday qilib

$$\begin{array}{lll} p_{AA,A}=1 & p_{Aa,A}=1/2 & p_{aa,A}=0 \\ p_{AA,a}=0 & p_{Aa,a}=1/2 & p_{aa,a}=1 \end{array} \quad (6)$$

Ni hosil qilamiz.
(6) qeymatlarni (5)ga quyib

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 \\ x_2' = x_2^2 + x_1x_2 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz $x_1 + x_2 = 1$ ligini e'tiborga olsak oxirida

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad (7)$$

bo'ladi.

Yani avloddan - avlodga o'tishda allellarning chastotasi o'zgarmas bo'lar ekan, bu Xardi- Vaynbergning birinchi qonunini tasdiqlaydi.

Tasdiq1. Xardi- Vaynbergning birinchi avloddan keyingi avlodga o'tishda allel chastotasining o'zgarmaslik qonuni avloddan- avlodga o'tishning Mendel tipi uchun o'rinli buladi.

Isbot. Quydagi belgilashlarni kiritamiz: $p_{AA,A} = a$, $p_{Aa,A} = b$, $p_{aa,A}=c$, u holda Xardi- Vaynberg tasdig'i quydagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = ax^2 + 2bx(1-x) + c(1-x)^2,$$

Yoki bir qancha soddalashtirishdan keyin

$$x = (a-2b+c)x^2 + 2(b-c)x + c$$

ni olamiz. U holda chastotaning o'zgarmas bo'lishi uchun

$$\begin{cases} a-2b+c=0 \\ 2(b-c)=1 \\ c=0 \end{cases}$$ bo'lishi kerak.

bu tenglamalar sistemasini yechib

$a=1$, b=1/2, c=0 ni olamiz. Bu erdan tasdiq1 ning isboti kelib chiqadi.

(7) munosabatdan $V(S^1)=S^1$ ekanligi yani kvadratik stoxastik operatorlarning suyrektiv ekanligi kelib chiqadi.

2. n=2 bo'lgan hol. Faraz qilaylik x_1,x_2 va x_3 chastotalar $x=(x_1,x_2,x_3)\in S^2$ - mos ravishda AA, Aa, aa genotiplarning chastotalari bo'lsin.

$P_{AAAA,AA}$-AAAA genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o'tish ehtimolidir
$P_{AAAa,AA}$-AAAα genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o'tish ehtimolidir
$P_{AAaa,AA}$-AAα α genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o'tish ehtimolidir
$P_{Aaaa,AA}$-Aα α α genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o'tish ehtimolidir
$P_{aaaa,AA}$-α α α α genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o'tish ehtimolidir
va hakozo $P_{....,aa}$-1 $-$ $P_{...,AA}$, $P_{....,aA}$-1 $-$ $P_{...,Aa}$

Mendel tipidagi avloddan - avlodga o'tishda kvadratik operator $\{p_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^{3}$ quydqgi ko'rinishga keladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

bu jadvaldagi qeymatlarni (5) ga quysak

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + 1/4x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 + 1/2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ x_3' = 1/4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \end{cases}$$

ni olamiz va uni soddalashtirib

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases} \qquad (8)$$

ni hosil qilamiz.

Avloddan - avlodga o'tishning keying chastotasini aniqlash uchun (5) ga $x_1,\ x_2,\ x_3$ larning o'rniga mos ravishda $x_1',\ x_2',\ x_3'$ larni qo'yesh zarur, yani quydagi tenglamani olamiz

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1' + 1/2x_2'')^2 \\ x_2'' = 2(x_1' + 1/2x_2')(x_3' + 1/2x_2') \\ x_3'' = (x_3' + 1/2x_2')^2 \end{cases} \qquad (9)$$

yoki (9) ga (8) ifodani qo'yib, oxirida

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2'' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3'' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases}$$

ga ega bo'lamiz.

bu erdan ko'rinadiki avloddan avlodga o'tishning keying keladigan bosqichlaridagi genotip chastotalari xuddi birinchi bosqichdagi kabi bo'ladi. Bu xossani qiuydagi tasdiq ko'rinishida yozamiz.

Tasdiq.2. Avloddan - avlodga o'tishda genotip chastotasining o'zgarmasligi bitta bosqichdan cung amalga oshar ekan.

chastotalarining o'zgarmasligi Xardi-Vaynbergning qonunining uchunchi tasdig'dir.

(8) munosabatdan ko'rinadiki (0;1;0) no'qtaning asli bush to'plamdir, bundan kelib chiqadiki bu kvadratik stoxastik operator suyr'ektiv akslantirish emas.

Shunday qilib qo'ydgi teoremalarni isbotladik.

Теорема 2. Yuqorida aniqlangan $\tilde{V}_\alpha$ - kvadratik stoxastik operator $\alpha = 1$ va $n = 1$ yoki $n = 2$ bulganda Mendel kvadratik stoxastik operatori bo'ladi.

$x^{(k+1)}$ ketma – ketlik ikkinch qadamdan boshlab qo'zg'almas bo'lsa kvadratik stoxastik operatori Mendel kvadratik stoxastik operatori deyiladi.

Теорема 3. $\tilde{V}_\alpha$ - kvadratik stoxastik operatori $\alpha = 1$ va $n = 1$ bo'lganda syurektiv kvadratik stoxastik operatori bo'ladi, $n = 2$ syurektiv kvadratik stoxastik operatori bo'lmaydi.

References:

1. Генетика и наследственность.//Сб.статей. М.,1987.300 с.
2. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей. М,1936,138 с.
3. Гардинер К.В. Стохастические методы вестественных науках. М.: Мир. 1986,. 528 с.
4. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М: Мир,1969, 238 с. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. М., Просвещение, 1968.-308 с.
5. Сарымсаков Т.А., Ганиходжаев Р.Н. Центральная предельнаятеорема для квадратичных цепей.//УзМЖ, 1991.№I, с.57-64.
6. Мейлиев Х.Ж., Гуломов О.Х. (Кар ГУ).Квадратичные стохастические опеораторы, построенные по биномиальным распределениям.

7. Мейлиев Х. Ж. Эргодическиесв свойства мер,порожденных одним классом квадратичных операто1.Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. квфедр. Украины, отд.матем.,1924,вып.Ic 83-115.,
8. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турнира//Мат.Сб.-1992.-83,№8.-С.119-140.
9. Ганиходжаев Р.Н. Карта неподвижных точек функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем//Мат. Заметки.-1994.-56.-С.1125-1131.