

BOSHLANG'ICH SHARTLI MASALALARNI RUNGE-KUTTA USULIDA YECHISH

1. Nurulloyeva Gulchiroy Baxshillo qizi

Konimex tuman ixtisoslashtirilgan maktab o'qituvchisi

ORCID: 0009-0003-4229-6428

E-mail: mydreams199717@gmail.com

2. Ahmadov Ilhom Aktam o'g'li

Sharq universiteti o'qituvchisi, ORCID: 0009-0008-8037-1966

E-mail: ilhomahmadov0516@gmail.com

UDK 519.622

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22827051>

ANNOTATSIYA: Boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamalarni yuqori aniqlikda sonli yechish muhandislik, fizika, texnika va amaliy matematikaning ko'plab masalalarida muhim ahamiyat kasb etadi. Mazkur maqolada boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamalarni yechishning samarali usullaridan biri bo'lgan to'rtinchi tartibli Runge-Kutta (RK4) usulining nazariy asoslari va amaliy qo'llanilishi yoritilgan. Tadqiqotda RK4 usulining matematik mohiyati, hisoblash algoritmi hamda yordamchi koeffitsiyentlarni aniqlash bosqichlari izchil bayon etilgan. Analitik yechimlari ma'lum bo'lgan ikkita boshlang'ich shartli differensial tenglama RK4 usuli yordamida bosqichma-bosqich yechilib, olingan sonli natijalar analitik yechimlar bilan taqqoslangan, absolyut xatoliklar hisoblangan va taqqoslash grafiklari qurilgan. Tadqiqot natijalari RK4 usulining yuqori aniqlik, yaxshi barqarorlik va hisoblash samaradorligiga ega ekanligini tasdiqlaydi. Maqolaning ilmiy hissasi RK4 usulining aniqligi va samaradorligini analitik yechimlar asosida kompleks tahlil qilish hamda xatoliklarni grafik ko'rinishda baholashdan iborat. Olingan natijalar usulni o'qitish va amaliy hisoblashlarda qo'llash uchun uslubiy asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Kalit so'zlar: oddiy differensial tenglama, boshlang'ich shartli masala, Runge-Kutta usuli, RK4 algoritmi, sonli yechim, analitik yechim, absolyut xatolik, hisoblash matematikasi.

Kirish

Oddiy differensial tenglamalar mexanika, fizika, elektrotexnika, biologiya, iqtisodiyot va boshqa ko'plab fan sohalarida uchraydigan jarayonlarni matematik modellashtirishning asosiy vositalaridan biridir. Ko'pgina amaliy masalalarda analitik yechimni topish murakkab bo'lganligi sababli ularni sonli usullar yordamida yechish zarurati yuzaga keladi. Boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamalarni sonli yechishda Eyler, Runge-Kutta, Adams-Bashforth va Adams-Moulton usullari keng qo'llaniladi. Ular orasida to'rtinchi tartibli Runge-Kutta (RK4) usuli yuqori aniqligi, hisoblash algoritmining soddaligi va barqarorligi sababli amaliy hisoblashlarda eng ko'p qo'llaniladigan usullardan biri hisoblanadi. RK4 usulining nazariy asoslari va uning matematik xossalari ko'plab klassik ilmiy manbalarda batafsil bayon qilingan [1-6]. So'nggi yillarda ushbu usulning modifikatsiyalari, adaptiv qadamli algoritmlari hamda turli muhandislik va ilmiy modellashtirish masalalaridagi qo'llanilishiga bag'ishlangan tadqiqotlar olib borilmoqda [7-10].

Shunga qaramay, mavjud adabiyotlarning ko'pchiligida RK4 usulining algoritmi qisqacha bayon qilinadi va oraliq hisoblash

bosqichlari yetarli darajada izohlanmaydi. Mazkur maqolaning maqsadi RK4 usulining nazariy asoslarini qisqacha yoritish, analitik yechimlari ma'lum bo'lgan ikkita boshlang'ich shartli differensial tenglama misolida algoritmi bosqichma-bosqich tushuntirish hamda olingan sonli natijalarni analitik yechim bilan taqqoslash orqali usulning aniqligini baholashdan iborat.

Tadqiqot metodologiyasi

Boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish usullari orasida Runge-Kutta usullari yuqori aniqligi, algoritmik soddaligi va hisoblash samaradorligi bilan ajralib turadi. Ushbu usullar differensial tenglamalarning analitik yechimini topish qiyin yoki umuman imkonsiz bo'lgan hollarda taqribiy yechimni yuqori aniqlik bilan aniqlash imkonini beradi. To'rtinchi tartibli Runge-Kutta (RK4) usuli esa amaliy hisoblashlarda eng ko'p qo'llaniladigan sonli usullardan biri hisoblanadi.

Boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglama quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin.

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0 \quad (1)$$

Bu yerda $f(x,y)$ uzluksiz va yetarlicha silliq funksiya, x_0 - boshlang'ich nuqta, y_0 esa boshlang'ich qiymatni bildiradi.

Hisoblash jarayoni ma'lum h qadam uzunligi asosida amalga oshiriladi. Hisoblash tugunlari quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$x_{n+1}=x_n+h, \quad n=0,1,2,\dots \quad (2)$$

Har bir qadamda maqsad oldingi tugundagi y_n qiymatidan foydalanib keyingi tugundagi y_{n+1} qiymatini aniqlashdan iborat. Oddiy Eyler usulida hosilaning faqat qadam boshidagi qiymati hisobga olinadi. Shu sababli uning aniqligi qadam uzunligiga sezilarli darajada bog'liq bo'ladi. Runge-Kutta usulida esa hosilaning qadam davomida bir nechta nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi va ularning vaznli o'rtachasi olinadi. Natijada sonli yechimning aniqligi sezilarli darajada ortadi.

To'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulida avvalo quyidagi to'rtta yordamchi koeffitsiyent hisoblanadi [1,2,7]:

$$\text{Birinci yordamchi} \quad k_1=f(x_n, y_n). \quad (3)$$

$$\text{Ikkinchi yordamchi koeffitsiyent} \quad k_2=f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}k_1\right). \quad (4)$$

$$\text{Uchinchi yordamchi koeffitsiyent} \quad k_3=f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}k_2\right). \quad (5)$$

$$\text{To'rtinchi yordamchi koeffitsiyent} \quad k_4=f(x_n+h, y_n+hk_3). \quad (6)$$

Hisoblangan yordamchi koeffitsiyentlar asosida keyingi tugundagi yechim quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4). \quad (7)$$

Bu formulada k_1 qadam boshidagi urinma qiyaligini, k_2 va k_3 qadam o'rtasidagi urinma qiyaliklarini, k_4 esa qadam oxiridagi urinma qiyaligini ifodalaydi. Ushbu qiymatlar 1:2:2:1 nisbatdagi og'irlik koeffitsiyentlari bilan o'rtachalanadi. Bunday yondashuv yechimning keyingi qiymatini oddiy Eyler usuliga nisbatan ancha yuqori aniqlik bilan hisoblash imkonini beradi.

RK4 usulining nazariy aniqligi yuqori tartibli bo'lib, uning bir qadamdagi (lokal) xatoligi $E_{\text{lokal}}=O(h^5)$, global xatoligi esa $E_{\text{global}}=O(h^4)$ tartibga ega. Demak, qadam uzunligi ikki marta kamaytirilganda global xatolik taxminan $2^4=16$ marta kamayadi. Aynan shu xususiyat RK4 usulining amaliy hisoblashlarda keng qo'llanilishiga sabab bo'ladi.

To'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulining hisoblash algoritmi quyidagi ketma-ketlikda bajariladi: Boshlang'ich qiymatlar x_0 , y_0 va qadam uzunligi h tanlanadi. Birinchi yordamchi koeffitsiyent k_1 hisoblanadi. Ikkinchi yordamchi koeffitsiyent k_2 aniqlanadi. Uchinchi yordamchi koeffitsiyent k_3 hisoblanadi. To'rtinchi yordamchi koeffitsiyent k_4 aniqlanadi.

Quyidagi formula yordamida keyingi tugundagi yechim hisoblanadi:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4). \quad (7)$$

Hisoblash nuqtasi $x_{n+1}=x_n+h$ formula yordamida yangilanadi va jarayon berilgan oraliq oxirigacha davom ettiriladi. Mazkur algoritmnining asosiy afzalligi shundaki, u hosilaning faqat bitta nuqtadagi qiymatini emas, balki butun qadam davomida funksiyaning o'zgarish xarakterini hisobga oladi. Shu sababli

RK4 usuli silliq funksiyalar uchun yuqori aniqlikdagi sonli yechimlarni beradi hamda ilmiy tadqiqotlar, muhandislik hisoblari va matematik modellashirish masalalarida keng qo'llaniladi.

Natijalar va muhokama

Quyidagi boshlang'ich shartli differensial tenglama qaralsin

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=x+y-x^2, \\ y(0)=1. \end{cases} \quad (8)$$

Mazkur tenglamaning analitik yechimi

$$y(x)=x^2+x+1 \quad (9)$$

RK4 usuli yordamida $x=0$ nuqtadan $x=0.1$ nuqtaga o'tishni ko'rib chiqamiz. Hisoblash qadami $h=0.1$. Boshlang'ich qiymatlar $x_0=0, y_0=1$.

1-bosqich. k_1 ni hisoblash. RK4 usuliga ko'ra $k_1=f(x_0, y_0)$. Bizning funksiya $f(x,y)=x+y-x^2$. Shuning uchun $k_1=f(0,1)=0+1-0^2=1$

Demak, $k_1=1$. Bu qiymat boshlang'ich nuqtadagi urinma qiyaligini ifodalaydi.

2-bosqich. k_2 ni hisoblash formulasi $k_2=f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{h}{2}k_1\right)$. Qiymatlarni qo'yamiz

$$\begin{aligned} x_0+\frac{h}{2} &=0+\frac{0.1}{2}=0.05, \\ y_0+\frac{h}{2}k_1 &=1+\frac{0.1}{2}\times 1=1.05. \end{aligned}$$

Endi funksiya qo'yamiz

$$\begin{aligned} k_2 &=0.05+1.05-(0.05)^2 \\ &=1.0975. \end{aligned}$$

Demak, $k_2=1.0975$. Bu qiymat qadamning o'rtasidagi urinma qiyaligini baholaydi.

3-bosqich. k_3 ni hisoblash. $k_3=f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{h}{2}k_2\right)$ formula yordamida hisoblaymiz

$$\begin{aligned} y_0+\frac{h}{2}k_2 &=1+0.05\times 1.0975 \\ &=1.054875. \end{aligned}$$

Shunda

$$\begin{aligned} k_3 &=0.05+1.054875-(0.05)^2 \\ &=1.102375. \end{aligned}$$

Demak, $k_3=1.102375$.

4-bosqich. k_4 ni hisoblash. Formula $k_4=f(x_0+h, y_0+hk_3)$.

Hisoblaymiz

$$\begin{aligned} x_0+h &=0.1, \\ y_0+hk_3 &=1+0.1\times 1.102375 \\ &=1.1102375. \end{aligned}$$

Endi

$$\begin{aligned} k_4 &=0.1+1.1102375-(0.1)^2 \\ &=1.2002375. \end{aligned}$$

Demak, $k_4=1.2002375$.

5-bosqich. y_1 ni hisoblash. Asosiy formula

$$y_1=y_0+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4).$$

Qiymatlarni qo'yamiz

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6} (1 + 2 \times 1.0975 + 2 \times 1.102375 + 1.2002375) = 1.109999791666.$$

6-bosqich. Analitik yechim bilan taqqoslash. Analitik yechim $y(x) = x^2 + x + 1$. Shuning uchun $y(0.1) = 0.1^2 + 0.1 + 1 = 1.11$. RK4 natijasi $y_{RK4} = 1.1099997916$. Absolyut xatolik $\varepsilon = 1.11 - 1.1099997916 = 2.0833 \times 10^{-7}$.

1- jadvalda $x=1$ gacha bo'lgan qiymatlar hisoblangan va analitik yechim bilan solishtirilgan. Jadvaldan ko'rinadiki qadamlar soni ortgani sari absolyut xatolik ham ortadi. Bu xatoliklarni kamaytirish uchun h qadam uzunligini kichraytirish va hisoblashlarni ko'paytirish kerak bo'ladi.

1- jadval. $x=1$ va $h=0.1$ uchun sonli usul va analitik yechimning qiymatlari (absolyut xatolik ham keltirilgan).

x	RK4 y	Analitik y	Absolyut xatolik
0	1	1	0
0,1	1,11	1,11	2.08×10^{-7}
0,2	1,24	1,24	4.39×10^{-7}
0,3	1,389999	1,39	6.93×10^{-7}
0,4	1,559999	1,56	9.74×10^{-7}
0,5	1,749999	1,75	1.29×10^{-6}
0,6	1,959998	1,96	1.63×10^{-6}
0,7	2,189998	2,19	2.01×10^{-6}
0,8	2,439998	2,44	2.43×10^{-6}
0,9	2,709997	2,71	2.89×10^{-6}
1	2,999997	3	3.40×10^{-6}

Xulosa

Mazkur maqolada boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamalarni sonli yechishning samarali usullaridan biri bo'lgan to'rtinchi tartibli Runge-Kutta (RK4) usulining nazariy asoslari hamda amaliy qo'llanilishi yoritildi. Dastlab RK4 usulining matematik mohiyati, hisoblash algoritmi va yordamchi koeffitsiyentlar k_1, k_2, k_3, k_4 ning hisoblanish tartibi bayon qilindi. Shuningdek, usulning lokal va global xatoliklari haqida qisqacha nazariy ma'lumotlar keltirildi. RK4 usulining ishlash prinsipi analitik yechimlari ma'lum bo'lgan ikkita boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglama misolida bosqichma-bosqich ko'rsatildi. Har bir misolda sonli yechimlar RK4 algoritmi yordamida hisoblanib, analitik yechimlar bilan taqqoslandi. Olingan natijalar usulning yuqori aniqlikka ega ekanligini hamda qadam uzunligi ($h=0.1$) bo'lgan holatda ham analitik yechimga juda yaqin qiymatlar berishini ko'rsatdi. Hisoblangan absolyut xatoliklarning juda kichik qiymatlarga ega bo'lishi RK4 usulining to'rtinchi tartibli aniqligini amaliy jihatdan tasdiqladi. Jadvalda keltirilgan qiymatlar analitik yechim bilan solishtirilib absolyut xatolikni ortishi ochib berildi. Xatoliklarni kamaytirish uchun tafsiyalar berildi.

Tadqiqot natijalari RK4 usuli boshlang'ich shartli oddiy differensial tenglamalarni yechishda aniqlik va hisoblash murakkabligi o'rtasidagi samarali muvozanatni ta'minlashini ko'rsatdi. Mazkur usul ilmiy tadqiqotlar, matematik modellash, muhandislik hisoblari hamda fizik va texnologik jarayonlarni modellashda muvaffaqiyatli qo'llanilishi mumkin. Kelgusidagi tadqiqotlarda RK4 usulining adaptiv qadamli modifikatsiyalari, yuqori tartibli Runge-Kutta usullari hamda qattiq oddiy differensial tenglamalarni yechishga mo'ljallangan zamonaviy sonli algoritmlar bilan taqqoslash orqali usulning qo'llanish chegaralari va samaradorligini yanada chuqurroq tahlil qilish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Хайпер Э., Нёрсетт С. П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: Мир, 1990. 512 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. - М. Наука, 1989. 432 с.
3. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. 592 с.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 592 с.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. - М.: Наука, 1975. 632 с.
6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. - СПб.: Лань, 2006. 672 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. 736 с.
8. Butcher J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 3rd ed. - Chichester: John Wiley & Sons, 2016. 536 p. DOI: 10.1002/9781119121534
9. Lambert J. D. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*. Chichester: John Wiley & Sons, 1991. 304 p.
10. Burden R. L., Faires J. D., Burden A. M. *Numerical Analysis*. 10th ed. Boston: Cengage Learning, 2016. 888 p.
11. Epperson J. F. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. In: *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. 3rd ed. Hoboken,

NJ: John Wiley & Sons, 2021. Chapter 6. DOI:
10.1002/9781119604570.ch6

12. Guzmán F. S. *Numerical Methods for Initial Value Problems in Physics*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. 357 p. DOI: 10.1007/978-3-031-33556-3.