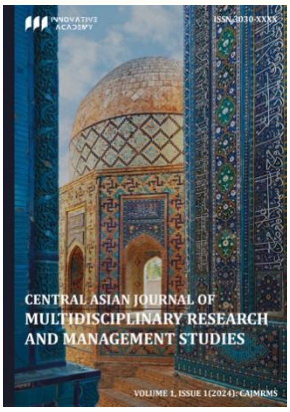
CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY RESEARCH AND MANAGEMENT STUDIES
Volume 3, Issue 8, August 2026



MATRITSAVIY RIKATTI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI KETMA-KET ALMASHTIRISHLAR YORDAMIDA BERNULLI HAMDA BIR JINSLI BOʻLMAGAN CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARGA KELTIRIB YECHISH.

Komilova Laylo Botir qizi
Urganch davlat universiteti
Fizika-Matematika fakulteti
4-kurs Amaliy Matematika yoʻnalishi talabasi

https://doi.org/10.5281/zenodo.22043562

ARTICLE INFO

Received: 10th August 2026
Accepted: 11th August 2026
Published: 19th August 2026

KEYWORDS

matritsaviy Rikkati tenglamasi, Bernulli tenglamasi, chiziqli differensial tenglama, bir jinsli boʻlmagan tenglama, matritsaviy analiz, differensial tenglamalar, almashtirish usuli, fundamental matritsa.

ABSTRACT

Ushbu maqolada matritsaviy Rikkati differensial tenglamasini yechish masalasi oʻrganiladi. Dastlab tenglama mos almashtirishlar yordamida Bernulli turidagi matritsaviy differensial tenglamaga keltiriladi. Soʻngra Bernulli tenglamasini chiziqlashtirish natijasida bir jinsli boʻlmagan chiziqli matritsaviy differensial tenglama hosil qilinadi. Olingan tenglamaning yechish usuli bosqichma-bosqich bayon qilinib, matritsaviy Rikkati tenglamasining umumiy yechimini qurish algoritmi keltiriladi

Kirish. Matritsaviy Rikkati tenglamasi nolinear xarakterga ega boʻlgani sababli uning aniq yechimini topish koʻpincha murakkab hisoblanadi. Shu bois tenglamani Bernulli yoki chiziqli matritsaviy differensial tenglamalarga keltirishga asoslangan usullar katta nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Bunday yondashuvlar yechimni qurish jarayonini soddalashtirib, optimal boshqaruv va matematik modellashtirish masalalarida samarali algoritmlarni ishlab chiqishga imkon beradi.

Bizga quyidagi

$$X'(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) + X(t)R(t)X(t) + Q(t) \qquad (1)$$

koʻrinishgi rikatti matritsaviy tenglamasi berilgan boʻlsin. Bu yerda A(t), B(t), R(t) va Q(t) lar $n * n$ oʻlchamli matritsalardir.

1-bosqich: (1) tenglamani yechimini topish uchun avval uning bitta xususiy yechimini topishimiz kerak. Shundan keyin $X(t)=Y(t)+X_1(t)$ almashtirish orqali uni Bernulli matritsaviy differensial tenglamasiga keltiramiz.

$X_1(t)$ yechim:

$$A(t)X(t) + X(t)B(t) + X(t)R(t)X(t) + Q(t) = 0$$

tenglamani yechish orqali topiladi. Endi almashtirishni bajaramiz.

$$X(t) = Y(t) + X_1(t) \;\; => \;\; X'(t) = Y'(t) + X'_1(t)$$

$$Y'(t) + X'_1(t) = A(t)Y(t) + A(t)X_1(t) + Y(t)B(t) + X_1(t)B(t) + Y(t)R(t)Y(t) + X_1(t)R(t)Y(t) + Y(t)R(t)X_1(t) + X_1(t)R(t)X_1(t) + Q(t)$$

Bu yerda:

$$X'_1(t) = A(t)X_1(t) + X_1(t)B(t) + X_1(t)R(t)X_1(t) + Q(t) \qquad (2)$$

o‘rinli ekanligidan tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$Y'(t)= \left(A(t) + X_1(t)R(t)\right)Y(t) + Y(t)(B(t) + R(t)X_1(t)) + Y(t)R(t)Y(t)$

1)$A(t) + X_1(t)R(t) = A_1(t)$

2)$B(t) + R(t)X_1(t) = B_1(t)$ belgilashlar kiritamiz. Natijada, (2) tenglamamiz Bernulli matritsaviy differensial tenglamasiga o‘tadi.

$$Y'(t)= A_1(t)Y(t) + Y(t)B_1(t) + Y(t)R(t)Y(t) \qquad (3)$$

2-bosqich: Biz bu bosqichda matritsaviy Bernulli tenglamasidan bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga keltirishni ko‘rib chiqamiz. Buning uchun o‘ng tarafdan va chap tarafdan Y^{-1} ga ko‘paytiramiz. Bundan

$Y^{-1}\,Y'(t)Y^{-1}$=$Y^{-1}\,A_1(t)Y(t)Y^{-1} + Y^{-1}\,Y(t)B_1(t)Y^{-1} + Y^{-1}\,Y(t)R(t)Y(t)Y^{-1}$

$Y^{-1}Y = E$ ekanligidan tenglama quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$Y^{-1}\,Y'(t)Y^{-1}=Y^{-1}A_1(t) + B_1(t)Y^{-1} + R(t) \qquad (4)$$

Endi, $Y^{-1} = U$ deb begilash kiritsak,

$\frac{dE}{dx} = \frac{dY^{-1}Y}{dx} = Y^{-1}Y' + Y'^{-1}Y$=0

$Y'^{-1} =- Y^{-1}Y'Y^{-1}$ kelib chiqadi. Bu esa U' ga ham tengdir. Demak, (4) ifodani quyidagicha yozishimiz mumkin ekan:

$$-U' = UA_1(t) + B_1(t)U + R(t)$$

Mos almashtirishlar orqali

$$A_2 =- B_1(t);$$

$$B_2 =- A_2(t)$$

$$R_2 =- R(t)$$

$$\boldsymbol{U' = A_2(t)U + UB_2(t) + R_2(t)} \qquad \textbf{(5)}$$

bir jinsli bo‘lmagan matritsaviy differensial tenglama hosil bo‘ladi.

3-bosqich: Biz bu bosqichda (5) bir jinsli bo‘lmagan matritsaviy differensial tenglamani yechishni ko‘rib chiqamiz.

$$\boldsymbol{U' = A_2(t)U + UB_2(t) + R_2(t)}$$

mazkur tenglamaning yechimi uning bir jinsli qismining va bitta xususiy yechimi yig‘indisidan iborat. Ya’ni:

$$U(t) = U_{bir.jinsli}(t) + U_{xususiy}$$

Bir jinsli qismining yechimini izlash:

Matritsaviy tenglamaning yechimini U(t)=Y(t)Z(t) koʻrinishida izlash (faktorizatsiya usuli) orqali tenglamani ikkita chiziqli matritsaviy differensial tenglamaga ajratamiz.

$$\boldsymbol{U' = A_2(t)U + UB_2(t)}$$

$$Y^{'}(t) = A_2(t)Y(t) \text{ va } Z^{'}(t) = Z(t)B_2(t) \qquad (6)$$

(6) tenglamalarni yechib, yechimlardagi chiziqli erkli yechimlarni ajratib olib, Y(t) va Z(t) matritsalar tuzamiz. Quyida 2*2 matritsa uchun koʻrib chiqamiz:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = A_2(t)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y'_1 = A_2 y_1 \qquad y'_2 = A_2 y_2 \ \Rightarrow$$

$$y_1 = y'C_1$$

$$y_2 = y''C_2$$

Endi chiziqli erkli yechimlarni ajratib, $Y(t)$ matritsa tuzsak,

$$\boldsymbol{Y(t)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y'} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{y''} \end{pmatrix}$$

$$Z^{'}(t) = Z(t)B_2(t)$$

$Z^{'T} = B_2(t)Z^T \quad Z^T = U \ deb\ belgilash\ kiritsak,\ U^{'} = B_2(t)U$ hosil boʻladi. Buni ham xuddi tepada keltirilganidek, yechsak, $U(t) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$Z(t) = U^T = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$ hosil boʻladi.

Demak, tenglamamizning bir jinsli qismining yechimi: $\boldsymbol{U(t) = Y(t)CZ(t)}$ **(7)**

4-bosqich: (5) tenglamamizning xususiy yechimini topish. Buning uchun topilgan (7) yechimdan oʻzgarmasni variatsiyalash usulidan foydalanamiz.

$$U(t) = Y(t)C(t)Z(t)$$

$$U^{'}(t) = Y^{'}(t)C(t)Z(t) + Y(t)C^{'}(t)Z(t) + Y(t)C(t)Z^{'}(t) = A(t)Y(t)C(t)Z(t) + Y(t)C(t)Z(t)B(t) + R(t)$$

$Y^{'}(t) = A(t)Y(t)\ va\ Z^{'}(t) = Z(t)B(t)$ ekanligidan

$Y^{'}(t)C(t)Z(t) + Y(t)C^{'}(t)Z(t) + Y(t)C(t)Z^{'}(t) = Y'(t)C(t)Z(t) + Y(t)C(t)Z'(t) + R(t)$ hosil boʻladi.

Natijada, $Y(t)C^{'}(t)Z(t) = R(t)$

$$C(t) = \int Y^{-1}(s)R(t)Z^{-1}(t)\,dx$$

Bundan kelib chiqadiki, xususiy yechim:

$$U_{xususiy}(t) = Y(t)(\int Y^{-1}(s)R(t)Z^{-1}(t)\,dx)Z(t).$$

Demak, (5) tenglamaning umumiy yechimi:

$U_{umumiy} = Y(t)CZ(t) + Y(t)(\int Y^{-1}(s)R(t)Z^{-1}(t)\,dx)Z(t)$

5-bosqich: Endi Koshi matritsalarini orqali yechimni ifodalashni ko‘rib chiqamiz.

$W(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s)$ va $V(t,s) = Z(t)Z^{-1}(s)$.

$U_{umumiy} = Y(t)CZ(t) + \int Y(t)Y^{-1}(s)R(t)Z^{-1}(t)Z(t)\,dx$

$U(t) = Y(t)CZ(t) + (\int Y(t)Y^{-1}(s)R(t)Z^{-1}(t)Z(t)\,dx)$

$\boldsymbol{U(t) = Y(t)C(t)Z(t) + (\int W(t,s)\,R(t)V(t,s)dx)}$

6-bosqich: (1) tenglama uchun (ya’ni biz qarayotgan matritsaviy Rikatti differensial tenglamasi uchun) umumiy yechimni topamiz:

$\boldsymbol{X(t) = Y(t)C(t)Z(t) + (\int W(t,s)\,R(t)V(t,s)dx)^{-1} + X_1(t)}$ **(8)**

Foydalangan adabiyotlar:

1. U.A.Xoitmetov Differensial tenglamalar nazariyasining tanlangan boblari. Urganch 2025.
2. Reid W.T. Riccati Differential Equations. – New York: Academic Press, 1972.
3. Ismoilov T.A. Matritsaviy differensial tenglamalar nazariyasi. – Toshkent: O‘qituvchi, 2008.
4. Lancaster P., Rodman L. Algebraic Riccati Equations. – Oxford: Clarendon Press, 1995.
5. Abou-Kandill H., Freilig G., Ionescu V., Janc G. Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory. – Basel: Birkhauser, 2003.