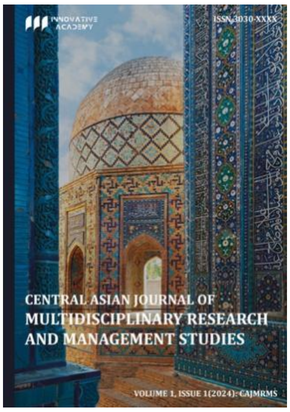

O‘ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK TENGLAMASI UCHUN VAQT BO‘YICHA TESKARI MASALANING SHARTLI TURG‘UNLIGI VA REGULYARLASHGAN YECHIMI

Rahmatulloyev Abdurahmon Alijonovich

Mirzo Ulugbek nomidagi Ozbekiston milliy universiteti 1-kurs magstranti, arahmatullayev518@gmail.com

+998943340302

https://doi.org/10.5281/zenodo.20339109

ARTICLE INFO

Received: 20th May 2026
Accepted: 21st May 2026
Published: 22nd May 2026

KEYWORDS

teskari masala, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, o‘zgaruvchan koeffitsiyent, Shturm–Liuvill masalasi, shartli turg‘unlik, regulyarlash, Tixonov usuli, Furye qatori.

ABSTRACT

Ushbu maqolada o‘zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun vaqt bo‘yicha teskari masala o‘rganilgan. Masalaning fizik va matematik mohiyati tahlil qilinib, uning Hadamard ma’nosida korrekt bo‘lmagan masalalar sinfiga mansubligi ko‘rsatildi. Ishda mos Shturm–Liuvill spektral masalasi sonli usullar asosida yechildi hamda Furye usuli yordamida rasmiy yechim hosil qilindi. Teskari masalaning yagonaligi isbotlanib, Tixonov korrektlik to‘plamida shartli turg‘unlik bahosi olindi. Shuningdek, Tixonov regulyarlash usuli va spektrni chekli kesish usuli asosida turg‘un regulyarlashgan yechimlar qurildi.

1 Kirish

Zamonaviy matematik fizika va amaliy matematikaning muhim yo‘nalishlaridan biri korrekt bo‘lmagan masalalarni tadqiq qilishdir. Ayniqsa, issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlari bilan bog‘liq teskari masalalar muhandislik, geofizika, tibbiyot va texnologik jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyatga ega.

To‘g‘ri masalalarda boshlang‘ich holat ma’lum bo‘lib, jarayonning keyingi rivojlanishi aniqlanadi. Teskari masalalarda esa buning aksi kuzatiladi: oxirgi vaqt momentidagi ma’lumotlar orqali boshlang‘ich holatni tiklash talab qilinadi. Bunday masalalar odatda turg‘un emas, ya’ni kiruvchi ma’lumotdagi kichik xatolik yechimning katta buzilishiga olib keladi.

Mazkur ishda quyidagi o‘zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi qaraladi:

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)u_x\right) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \qquad (1)$$

bu yerda

$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$

va k(x) — issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti.

Faraz qilamiz:

$k(x) \geq k0 > 0$

ya’ni muhitning issiqlik o‘tkazuvchanligi musbatdir.

Chegaraviy shartlar:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0 \tag{2}$$

Oxirgi vaqt momentidagi ma’lumot:

(3)

$u(x,T) = f(x)$

Maqsad — boshlang‘ich holatni, ya’ni

$u(x,0) = \varphi(x)$

ni aniqlashdir.

2 Mos spektral masala

O‘zgaruvchilarni ajratish usuli:

$u(x,t) = X(x)T(t)$

ni qo‘llab, quyidagi Shturm–Liuvill masalasiga kelamiz:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)X_n'(x)\right) = \lambda_n X_n(x) \tag{4}$$

$$Xn(0) = 0, \qquad Xn(\pi) = 0 \tag{5}$$

Mazkur spektral masalaning xos qiymatlari:

$0 < \lambda1 < \lambda2 < \cdots$

bo‘lib, ularga mos xos funksiyalar $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemani tashkil qiladi.

O‘zgaruvchan koeffitsiyent sababli aniq analitik yechimni topish qiyin bo‘lgani uchun, sonli usullardan foydalaniladi. Chekli ayirmalar usuli asosida masala matritsali xos sonlar muammosiga keltiriladi:

$AX = \lambda X$

Natijada yechimning Furye qatori ko‘rinishi olinadi:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n (T-t)} X_n(x) \tag{6}$$

bu yerda

$$f_n = \int_0^\pi f(x) X_n(x)\, dx$$

Boshlang‘ich vaqt uchun:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n T} X_n(x) \quad (7)$$

Bu formuladan ko‘rinadiki, n → ∞ da eλnT juda tez o‘sadi. Shu sababli kichik xatolik ham yechimning keskin buzilishiga olib keladi.

3 Yagonalik va shartli turg‘unlik

Teskari masalaning korrektlik to‘plamini quyidagicha aniqlaymiz:

$$M = \left\{ u(x,t) : \|u(x,0)\|_{L_2}^2 \le E^2 \right\} \quad (8)$$

Teorema 1. Agar teskari masalaning yechimi M to‘plamda mavjud bo‘lsa, u yagonadir. Isbot. Faraz qilaylik, u1 va u2 ikkita yechim bo‘lsin. U holda

w = u1 − u2

funksiya uchun:

w(x,T) = 0

bo‘ladi.

Furye koeffitsiyentlari nol bo‘lgani sababli:

w(x,t) ≡ 0

kelib chiqadi. Demak:

u1 ≡ u2

ya’ni yechim yagona.

Teorema 2. Agar

‖f‖L2 ≤ δ

bo‘lsa, u holda:

$$\|u(x,t)\| \le E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \quad (9)$$

Mazkur baho masalaning shartli turg‘unligini ifodalaydi.

4 Regulyarlashgan yechim

Turg‘un yechim olish uchun regulyarlash usullaridan foydalaniladi.

4.1 Tixonov regulyarlash usuli

Tixonov usulida yechim:

$$u^\alpha(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n e^{\lambda_n (T-t)}}{1 + \alpha e^{2\lambda_n T}} X_n(x) \quad (10)$$

ko‘rinishda olinadi.

Bu yerda α > 0 regulyarlash parametri bo‘lib, u xatolik darajasiga bog‘liq tanlanadi.

4.2 Spektrni chekli kesish usuli

Bu usulda qatorning yuqori chastotali hadlari tashlab yuboriladi:

N

uN(x,t) = Xfneλn(T−t)Xn(x) (11)

n=1

Bu yerda N = N(δ) xatolik miqdoriga mos tanlanadi.

5 Natijalar tahlili

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, o‘zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun teskari masala yuqori darajada turg‘unmasdir. Shunga qaramasdan, regulyarlash usullari yordamida amaliy hisob-kitoblar uchun turg‘un algoritmlar qurish mumkin.

Tixonov regulyarlash usuli xatoliklarni silliqlashda samarali natija beradi. Spektrni chekli kesish usuli esa hisoblash nuqtai nazaridan sodda va tezkor hisoblanadi.

6 Xulosa

Mazkur maqolada o‘zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun vaqt bo‘yicha teskari masala tadqiq qilindi.

Masalaning fizik mohiyati, turg‘unmaslik sabablari, spektral yechim usuli, yagonalik va shartli turg‘unlik xossalari o‘rganildi.

Tixonov regulyarlash usuli hamda spektrni chekli kesish usullari yordamida turg‘un regulyarlashgan yechimlar qurildi.

Olingan natijalar matematik fizika, raqamli modellashtirish va amaliy hisoblash usullarida qo‘llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of Ill-posed Problems. New York: Wiley, 1977.
2. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. American Mathematical Society, 1986.
3. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. De Gruyter, 2007.
4. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer, 2006.
5. Alifanov O.M. Inverse Heat Transfer Problems. Springer, 1994.