



## ТРИКОМИ МАСАЛАСИ ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИНИ МАХСУС ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРГА ҚЎЛЛАШ

Гойматова Дилафруз

“University of economics and pedagogy”

Мақтабгача ва бошланғич таълим кафедраси асиссенти

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14891751>

### ARTICLE INFO

Received: 11th February 2025

Accepted: 12th February 2025

Published: 18th February 2025

### KEYWORDS

бузилиш чизиғи, аралаш  
типдаги тенглама, регуляр ечим,  
чегаравий масала.

### ABSTRACT

Мақолада турли тартибли бузилиш чизиғига ега аралаш эллиптик-параболик типдаги тенглама учун локал чегаравий масала ечимининг ягоналиги исботланган.

Мақолада турли тартибли бузилиш чизиғига ега аралаш эллиптик-параболик типдаги тенглама учун локал чегаравий масала ечимининг ягоналигини ушбу

$$0 = \begin{cases} y^{m_1} u_x - x^{n_1} u_y, & x > 0 \\ y^{m_2} u_x + (-x)^{n_2} u_y, & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

тенгламани  $D \subset P^2$  соҳада қараймиз. Бу ерда  $D$  соҳа  $x > 0$  да  $y=0$ ,  $x=x_1$ ,  $y=x_2$  тўғри чизиқларнинг  $OA$ ,  $AB$ ,  $BB_0$ , кесмалари ва  $x < 0$  да

$$\sigma: \frac{1}{q_2} (-x)^{2q_2} \frac{1}{p_2} y^{2p_2} = 1$$

силлиқ чизиқ  $y=0$  тўғри чизиқнинг  $A_0O$  ксмаси билан чегараланган,  $0 < m_1 < m_2 + 1$ ,  $n_1 = \text{const} (u=1,2)$ ,  $x_1 = (2q_1)^{1/q_2}$ ,  $x_2 = p_2^{1/p_2}$ ,  $x = q_2^{1/q_2}$ ,  $2q_1 = n_1 + 2$ ,  $2q_2 = n_2 + 2$ ,  $2p_2 = m_2 + 2$ .

(1) тенглама  $x > 0$ ,  $y > 0$  да параболик типга тегишли,  $x < 0$ ,  $y > 0$  да эса эллиптик типга тегишли бўлади.

Маълумки, (1) тенглама учун чексиз соҳада локал ва нолокал чегаравий масалалар [1], [2] ишларда ўрганилаган.

Белгилаш киритамиз:

$$D_1 = \{(x, y) : 0 < x < x_1, 0 < y < x_2\}, D_2 = \{(x, y) : -x < x < 0, 0 < y < x_2\}.$$

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи  $u(x, y)$  функция (1) тенгламанинг регуляр ёки классик ечими дейилади.

1)  $u(x, y) \in C^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_2)$ ;

2)  $u(x, y)$  - (1) тенгламани  $D_1$  ва  $D_2$  соҳаларда қаноатлантиради.

**Трикоми масаласи.** Ушбу шартларни қаноатлантирувчи  $u(x, y)$  функцияни аниқланг:

- 1)  $y(x, \tilde{y}) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ ;
- 2)  $y(x, \tilde{y})$ - (1) тенгламининг  $D_1$  ва  $D_2$  соҳалардаги регуляр ечими;
- 3)  $y(x, \tilde{y})$ - қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$\begin{aligned} y(x, \tilde{y}) \Big|_{\sigma} &= \psi(x, \tilde{y}), (x, \tilde{y}) \in \sigma, \\ y_{\tilde{y}} \Big|_{y=0} &= v_0(x), -x < x < 0, \\ y \Big|_{y=0} &= \varphi_1(x), 0 \leq x \leq x_1, \\ y \Big|_{y=h} &= \varphi_2(y), 0 < y < x_2, \end{aligned}$$

бу ерда берилган  $\psi(x, \tilde{y})$ ,  $v_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(y)$ , - функциялар бўлиб,

$$\begin{aligned} v_0(x) &\in C^1(-x < x < 0) \\ \varphi_1(x) &\in C(0 \leq x \leq x_1) \cap C^2(0 < x < x_1) \\ \varphi_2(y) &\in C(0 \leq \tilde{y} \leq x_2) \cap C^1(0 < \tilde{y} < x_2) \end{aligned}$$

$\psi(x, \tilde{y})$  функция эса  $\psi(x, \tilde{y}) = x\tilde{y}\bar{\psi}(x, \tilde{y})$ ,  $\bar{\psi}(x, \tilde{y}) \in C(\overline{\sigma})$  кўринишга эга.

Қуйидаги теорема ўринли.

**Теорема** (Экстремум принципи). Трикоми масаласининг ечими ёки  $\overline{D}$  соҳада ўзининг мусбат максимумига ва манфий минимумига  $\overline{\sigma} \cup A_0O \cup OA \cup AB$  да эришишли мумкин.

Экстремум принципидан бевосита (1) тенглама учун Трикоми масаласи ечимининг ягоналиги келиб чиқади.

Маълумки, номаълум функцияга нисбатан қаралаётган тенглама функционал тенглама дейилади. Масалан, бир ўзгарувчилик функциянинг жуфтлик, тўқлик, қўзғалмас нуқтага эга бўлиши хоссаларини ифодоловчи ушбу

$$\phi(x) = \phi(-x), \phi(x) = -\phi(x), \phi \circ \phi(x) = x$$

тенгдшлар функционал тенгламалардан иборат. Функционал тенглама бир ёки бир неча ўзгарувчилик бўлиши мумкин. Қуйидаги тенгламалар  $\phi(x) = \phi\left(\frac{x}{2}\right)$ ,  $\phi(x) = \cos\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right)$ ,  $\phi(0)=1$  (ф-узлуксиз функция) бир ўзгарувчилик функционал тенгламаларга мисол бўлади. Икки ўзгарувчилик

$$\begin{aligned} \phi(x+\tilde{y}) &= \phi(x) + \phi(\tilde{y}), \phi(x+\tilde{y}) = \phi(x)\phi(\tilde{y}) \\ \phi(x) &= \phi(x) + \phi(\tilde{y}), \phi(x) = \phi(x)\phi(\tilde{y}) \end{aligned}$$

функционал тенгламаларни Коши тенгламалари дейилади. Шу билан бирга икки ўзгарувчилик функционал тенгламаларга  $\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}$  - Иенсей тенгламаси ва  $\phi(x+\tilde{y})+\phi(x-\tilde{y})=2\phi(x)\phi(\tilde{y})$  - Даламбер тенгламасини келтиришимиз мумкин.

Одатда функционал тенгламалар кўплаб ечимларга эга бўлади. Кўпинча тенгламаларни бевосита ечиш бирмунча қийинчилик туғдиради. Аммо изланаётган функциянинг баъзи характеристик хоссаларига асосланиб функционал тенгламани ечишни амалга ошириш мумкин.

Агар қаторлар функционал тенгламалар кўринишидаги рекуррент фўрмула билан берилса, бундай қаторларнинг ноъмалум коэффициентларини функционал тенгламани ечиш ёрдамида аниқлаш мумкин эканини мисолларда кўрсатамиз.

**1-мисол.** Ушбу  $F(z) = (1 - qz)(1 - q^2z)(1 - q^3z) \dots (|q| < 1)$  функция даражали қаторга  $\Phi(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots$  кўринишида ёйилиши маълум.  $F(z) = (1 - qz)F(qz)$  функционал тенглама ёрдамида кўрсатилган қаторнинг  $A_n$  коэффициентларини аниқланг.

**Ечиш.** Келтирилган қатор бўйича

$$F(z) = (1 - qz)(1 - q^2z)(1 - q^3z)(1 - q^4z) \dots (1 - q^n z) \dots = A_0 + A_1qz + A_2q^2z^2 + A_3q^3z^3 + \dots$$

ва  $(1-қз) \Phi(қз) = A_0 + A_1қз + A_2қ^2з^2 + A_3қ^3з^3 + \dots - (A_0қз + A_1қ^2з^2 + A_2қ^3з^3 + A_3қ^4з^4 + \dots) =$   
 $A_0 + (A_1 - A_0)қз + (A_2 - A_1)қ^2з^2 + (A_3 - A_2)қ^3з^3 + \dots$

бўлгани учун берилган функционал тенглама

$$A_0 + (A_0 - A_1)қз + (A_2 - A_1)қ^2з^2 + (A_3 - A_2)қ^3з^3 + \dots = A_0 + A_1з + A_2з^2 + A_3з^3 + \dots$$

кўринишдаги айниятни беради.

з нинг бир хил вфразали коэффициентларини тенглаш

$$(A_n - A_{n-1})қ^n = A_n, n=1,2,3,\dots$$

тенгликларни беради.

Бу тенгликдан

$$A_n = \frac{q^n}{q^n - 1} A_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

муносабат келиб чиқсин. Ниҳоят, охирги тенгликдан изланаётган коэффициентларни аниқлаймиз:

$$A_n = \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}, n = 1, 2, 3, \dots$$

**2-мисол.** Маълумки,  $F(z) = (1 - qz)(1 - q^2z)(1 - q^3z)\dots(|q| < 1)$  га тескари миқдор

$$\frac{1}{F(z)} = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$$

кўринишда қаторга ёйилади.

$$\Phi(z) = (1-қз) \Phi(қз)$$

функционал тенглама ёрдамида кўрсатилган  $B_n$  коэффициентларни аниқланг.

**Ечилиши.** Келтирилган қатор буйича

$$\frac{1}{F(z)} = B_0 + B_1qz + B_2q^2z^2 + B_3q^3z^3 + \dots$$

бўлгани учун функционал тенглама

$$\frac{1}{F(qz)} = \frac{1 - qz}{F(z)}$$

кўринишга эга эканлигидан фойдаланиб,

$$B_0 + B_1қз + B_2қ^2з^2 + B_3қ^3з^3 + \dots = B_0 + B_1з + B_2з^2 + B_3з^3 + \dots - (B_0қз + B_1қ^2з^2 + B_2қ^3з^3 + B_3қ^4з^4 + \dots) =$$

$$B_0 + (B_1 - B_0қ)з + (B_2 - B_1қ)з^2 + (B_3 - B_2қ)з^3 + \dots = B_0 + B_1қз + B_2қ^2з^2 + B_3қ^3з^3 + \dots$$

тенгликни ёзамиз. Демак берилган функционал тенглама

$$B_0 + (B_1 - B_0қ)з + (B_2 - B_1қ)з^2 + (B_3 - B_2қ)з^3 + \dots = B_0 + B_1қз + B_2қ^2з^2 + B_3қ^3з^3 + \dots$$

кўринишдаги айниятни беради.

з нинг бир хил даражалари олдидаги коэффитцентларини тенглаш тенгликларни беради.

$$(B_n - B_{n-1}қ) = B_nқ^n, n=1,2,3,\dots$$

Бу тенгликлардан

$$B_n = \frac{q}{1 - q^n} B_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Ниҳоят охирги тенгликлардан изланаётган

$$A_n = \frac{q^n}{(1 - q)(1 - q^2)\dots(1 - q^n)}, n = 1, 2, 3, \dots$$

коэффициентларни аниқлаймиз.

Адабиётлар:

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциальные разности уравнения. – М.:Мир, 1961.
2. Салахитдинов М.С., Краевые задачи для уравнения эллипτικο-параболического типа с различными порядками вырождения. // Доклады АН РУз, 1992. - №12. – С. 3-5.
3. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1961.
4. Полина Э. Сеге Е. Задачи и теоремы анализа. Часть 1. – М.: Наука, 1978.
5. Силберстеин Р. Солутион оф тхе экуатион  $\phi'(x) = f(\frac{1}{x})$ . // Пилл. Маг. 7<sup>тх</sup> Серизс, 30(1940), п. 185-186.

