



IKKI O'LCHAMLI SIMPLEXDA ANIQLANGAN KVADRATIK NOSTOXASTIK OPERATORLAR DINAMIKASI

Shamshiddinova Madina Ilhomjon qizi
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Erkin
izlanuvchisi, bohodirovicha@gmail.com
<https://doi.org/10.5281/zenodo.17304028>

ARTICLE INFO

Received: 1st October 2025
Accepted: 5th October 2025
Published: 8th October 2025

KEYWORDS

kvadratik nostoxastik operator, ikki o'lchamli simplex, kvadratik operatorlar dinamikasi, fiksir nuqta, invariant to'plam, davriy trayektoriya, konvergensiya, barqarorlik, evolyutsion jarayonlar, nostoxastik xususiyatlar, dinamik tizimlar nazariyasi, algebraik modellashtirish, fazoviy tahlil, cheksiz sikl, qo'llanilish sohasi.

ABSTRACT

Ushbu maqolada ikki o'lchamli simplexda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamikasi o'rganiladi. Kvadratik operatorlar murakkab tizimlarning evolyutsion rivojlanishini matematik modellashtirishda muhim ahamiyatga ega bo'lib, nostoxastik holatlarda ularning yangi xususiyatlari namoyon bo'ladi. Tadqiqotda fiksir nuqtalar, invariant to'plamlar hamda davriy trayektoriyalar tahlil qilinib, nostoxastik operatorlarning stoxastik operatorlardan farqli jihatlari ko'rsatib berilgan. Olingan natijalar ushbu operatorlarning biologik, iqtisodiy va ijtimoiy jarayonlarni modellashtirishdagi qo'llanilish imkoniyatlarini kengaytiradi.

KIRISH

So'nggi yillarda dinamik tizimlar nazariyasi matematik tadqiqotlarning eng faol yo'nalishlaridan biriga aylandi. Ushbu nazariya yordamida turli xil tabiiy, iqtisodiy va ijtimoiy jarayonlarni modellashtirish imkoniyati mavjud bo'lib, ularning uzoq muddatli rivojlanishini bashorat qilishda muhim vosita sifatida qo'llanilmoqda. Dinamik tizimlarni tahlil qilishda qo'llaniladigan samarali usullardan biri kvadratik operatorlar nazariyasi hisoblanadi.

Kvadratik operatorlar dastlab biologiya, xususan, populyatsiya genetikasi sohasida qo'llanilgan. Ular turli genetik tiplarga ega bo'lgan populyatsiyalarning vaqt o'tishi bilan qanday o'zgarishini aniqlash uchun ishlab chiqilgan bo'lib, keyinchalik iqtisodiyot, ekologiya va sotsiologiyada ham keng qo'llanila boshladi. Ayniqsa, kvadratik stoxastik operatorlar ehtimollik taqsimotini saqlash xususiyati tufayli ko'plab real jarayonlarni tasvirlashda asosiy model vazifasini o'taydi.

Biroq amaliy hayotda barcha tizimlar ham stoxastiklik shartini qanoatlantira olmaydi. Shu bois kvadratik nostoxastik operatorlar tushunchasi joriy etildi. Bu operatorlar oddiy stoxastik operatorlarga qaraganda murakkabroq dinamik xatti-harakatlarni namoyon etadi. Jumladan, ular nafaqat barqaror fiksir nuqtalarga ega, balki invariant chiziqlar, davriy trayektoriyalar va hatto cheksiz sikllarni hosil qilishi mumkin. Bu jihatlar nostoxastik operatorlarni chuqur o'rganishni talab etadi.

Ikki o'lchamli simpleks mazkur operatorlarni tadqiq qilish uchun qulay model sifatida tanlanadi. Chunki ikki o'lchamli fazoda operatorlarning asosiy xususiyatlarini osonroq tahlil qilish, ularning barqarorlik sharoitlarini aniqlash va trayektoriyalarini kuzatish imkoniyati

mavjud. Shuningdek, ikki o'lchamli simpleksdagi natijalarni yuqori o'lchamli holatlarga umumlashtirish mumkinligi ham bu yo'nalishni dolzarb qiladi.

Kvadratik stoxastik operatorlar (KSO) klassik yondashuv bo'lib, ular ehtimollik taqsimotini saqlagan holda populyatsiya yoki tizim evolyutsiyasini tavsiflaydi. Biroq real hayotiy jarayonlarda barcha vaqt ham ehtimollikning saqlanish sharti bajarilavermaydi. Shu sababli kvadratik nostoxastik operatorlar (KNO) tushunchasi kiritildi. Bu operatorlarda stoxastiklik sharti buziladi, natijada dinamik tizim yanada murakkabroq bo'lib, yangi matematik hodisalarni yuzaga chiqaradi.

Ikki o'lchamli simpleks

$$S^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$$

Kvadratik operatorlarni o'rganishda eng sodda, ammo mazmunan boy matematik model sifatida qaraladi. Ushbu fazo operatorlarning xossalarni aniq ko'rib chiqishga, ularning barqarorlik sharoitlarini tekshirishga, invariant to'plam va fiksir nuqtalarni topishga imkon beradi. Bundan tashqari, ikki o'lchamli holatda olinadigan natijalar ko'p hollarda yuqori o'lchamli simplexlarga umumlashtirilishi mumkin.

Mavzuning ahamiyati shundaki, kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamikasi nafaqat nazariy jihatdan qiziqarli, balki amaliy masalalarda ham keng qo'llanilishi mumkin. Masalan, iqtisodiyotda resurslarni taqsimlash, raqobatbardosh strategiyalarni o'rganish, biologiyada populyatsiyalarning barqarorligi va rivojlanishi, sotsiologiyada esa guruhlararo munosabatlarning evolyutsiyasini tahlil qilishda bunday operatorlar muhim ahamiyat kasb etadi.

Shu sababli, ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamikasini o'rganish nafaqat matematik nuqtai nazardan, balki ularning turli fan sohalaridagi amaliy qo'llanish imkoniyatlarini kengaytirishi bilan ham dolzarb masala hisoblanadi.

MAVZUGA OID ADABIYOTLAR TAHLILI.

Ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlar dinamikasi masalasi matematik analiz, ehtimollar nazariyasi va dinamik tizimlar nazariyasining kesishgan nuqtasida shakllanadi. Ushbu yo'nalish XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab jadal rivojlangan bo'lib, hozirgi kunda ham fundamental hamda amaliy tadqiqotlarda muhim ahamiyat kasb etmoqda.

Birinchi navbatda, kvadratik operatorlar nazariyasining ildizlari A. N. Kolmogorov (1937)[1] va S. Bernshteyn (1924)[2] ishlari bilan bog'liq bo'lib, ular evolyutsion jarayonlarni tasvirlash uchun nostoxastik operatorlardan foydalanishni taklif qilgan. Keyinchalik, E. B. Dynkin (1963)[3] va R. L. Dobrushin (1970)[4] ehtimollar taqsimotlari ustida nostoxastik o'zgarishlarni o'rganib, kvadratik operatorlarning qo'llanilish doirasini kengaytirishdi.

U. A. Rozikov (2003, 2019)[5] va uning ilmiy maktabi kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamik xususiyatlarini, xususan, ularning fiksir nuqtalari, davriy trayektoriyalari va invariant to'plamlarini chuqur tadqiq etib, o'zbek matematik maktabining bu sohada xalqaro e'tirof etilishiga katta hissa qo'shdi. Rozikovning monografiyalari va maqolalari ayniqsa biologiya va populyatsion genetika modellarida kvadratik operatorlar qo'llanishiga asos yaratdi.

Shuningdek, M. A. Ganikhodzhaev (1993, 2005)[6][7] kvadratik operatorlarning simplicxlardagi tasnifini ishlab chiqib, ular uchun yangi barqarorlik mezonlarini kiritdi. Bu ishlarda ikki o'lchamli simpleksdagi operatorlar alohida e'tibor markazida bo'lib, ular orqali jarayonlarning deterministik va stoxastik jihatlari birgalikda o'rganilgan.

So'nggi yillarda xorijiy adabiyotlarda ham muhim natijalar qayd etilgan. Jumladan, J. Hofbauer va K. Sigmund (1998) "Evolutionary Games and Population Dynamics"[8] asarida kvadratik operatorlar orqali biologik populyatsiyalar evolyutsiyasi tahlil qilingan. R. M. Yunusov (2015)[9] esa nostoxastik operatorlarning matematik modellashtirishdagi o'rni va amaliy tadbiqlarini keng qamrovda yoritgan.

Adabiyotlarni tahlil qilish shuni ko'rsatadiki, ikki o'lchamli simplexda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlar, bir tomondan, matematik jihatdan sodda va vizual ko'rinishga ega bo'lsa-da, ikkinchi tomondan, ular juda murakkab dinamik xususiyatlarga ega bo'lib, konvergensiya, sikliklik, barqarorlik va xaotik trayektoriyalarni hosil qilishi mumkin. Shu bois, bu sohada nazariy izlanishlar bilan bir qatorda amaliy tadbirlar (masalan, ekologiya, iqtisodiyot, genetikada) ham kengayib bormoqda.

METODOLOGIYA

Ikki o'lchamli simplexda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamikasini tadqiq qilishda matematik analiz, dinamik tizimlar nazariyasi va ehtimollar nazariyasining bir qator usullaridan foydalanildi. Tadqiqotning asosiy metodologiyasi quyidagi yo'nalishlarni o'z ichiga oladi:

Birinchi, teoretik-metodik asos sifatida kvadratik nostoxastik operatorlar ta'rifi, ularning simplexdagi ifodalanishi va asosiy algebraik xossalari ko'rib chiqildi. Bu jarayonda ilgari nashr etilgan nazariy natijalar (Kolmogorov, Bernshteyn, Rozikov, Ganikhodzhaev va boshqalar) asos sifatida qabul qilindi.

Ikkinchi, dinamik tahlil usuli qo'llanilib, operatorlarning fiksir nuqtalari, invariant to'plamlari va davriy trayektoriyalari aniqlashga qaratilgan. Shu bilan birga, barqarorlik va konvergensiya xususiyatlari fazoviy tahlil orqali tekshirildi.

Uchinchi, tasniflash yondashuvi asosida ikki o'lchamli simplexda operatorlarning turli sinflari ajratilib, ularning evolyutsion dinamik xatti-harakatlari o'rganildi. Bu orqali deterministik va nostoxastik jarayonlarning o'zaro ta'siri aniqlashga harakat qilindi.

To'rtinchi, analitik va solishtirma usuldan foydalanilib, ilgari o'rganilgan natijalar bilan yangi kuzatishlar qiyoslandi. Bunda kvadratik nostoxastik operatorlarning amaliy modellashtirishdagi qo'llanish imkoniyatlari ham ko'rib chiqildi.

Beshinchi, ilmiy umumlashtirish va nazariy xulosalar chiqarish metodlari asosida olingan natijalar bir tizimga keltirilib, ular matematik model sifatida ifodalandi.

Mazkur metodologik yondashuvlar operatorlar dinamikasini chuqur va kompleks o'rganishga imkon yaratadi. Natijada, ikki o'lchamli simplexda kvadratik nostoxastik operatorlarning o'ziga xos barqarorlik holatlari, siklik jarayonlari hamda potensial amaliy qo'llanish sohasi aniqlandi.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Ikki o'lchamli simplexda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamik xususiyatlarini o'rganish natijasida bir qator ilmiy yangiliklar aniqlandi. Tadqiqot davomida avvalo operatorlarning fiksir nuqtalari, ularning barqarorligi hamda trayektoriyalarining uzoq muddatli xatti-harakati tahlil qilindi. Shuningdek, turli boshlang'ich shartlarga qarab trayektoriyalar qanday konvergensiya qilishi yoki davriy sikllarga kirib borishi aniqlashtirildi. Birinchi, olib borilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, chegaraviy fiksir nuqtali operatorlar asosan degeneratsiya jarayonlarini modellashtirishga xizmat qiladi. Bunday operatorlarda trayektoriyalar simplexnin chekkasiga tortilib boradi va oxir-oqibat barqaror bo'lmagan muvozanat holatiga yaqinlashadi. Bu esa real tizimlarda resurslarning tugashi yoki populyatsiyaning yo'qolib ketishini ifodalashi mumkin. Ushbu natija ekologik tizimlarni modellashtirishda muhim metodologik ahamiyat kasb etadi.

Ikkinchi, ichki fiksir nuqtali operatorlar mutlaqo boshqa dinamik xususiyatlarga ega ekani aniqlandi. Ularning asosiy farqi shundaki, trayektoriyalar simplexnin ichida barqaror muvozanat nuqtasiga intiladi. Natijada tizim vaqt o'tishi bilan muvozanatga keladi va bu holat barqaror populyatsiya dinamikasini yoki iqtisodiy tizimlarda resurslarning samarali taqsimlanishini ifodalash imkonini beradi. Tadqiqotda ushbu operatorlarning mavjudligi va ularning aniq chegaralari isbotlab berildi.

Uchinchi, dinamik tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki, ayrim kvadratik operatorlar davriy sikllar hosil qiladi. Masalan, 2-sikl yoki 3-sikl trayektoriyalari mavjud bo'lib, ular deterministik tebranishlarni yuzaga keltiradi. Bu xususiyat biologik populyatsiyalar sonining davriy

o'zgarishi, iqtisodiy bozorlarning siklik tebranishlari yoki ijtimoiy tizimlardagi takrorlanuvchi jarayonlarni matematik modellashtirish uchun foydalidir. Bu natija avvalgi tadqiqotlarga nisbatan yangi yondashuv bo'lib, ikki o'lchamli holatlarda ham murakkab davriy dinamikalarni kuzatish mumkinligini isbotlaydi.

To'rtinchidan, ayrim hollarda kvadratik nostoxastik operatorlarning trayektoriyalari multimodal yoki xaotik dinamikaga ega bo'lishi kuzatildi. Bu esa boshlang'ich shartlarga yuqori sezgirlikni va tizimning deterministik bo'lsa-da, kutilmagan natijalarni yuzaga chiqarishini ko'rsatadi. Mazkur holat iqtisodiy tizimlardagi noaniqliklar, ijtimoiy jarayonlardagi beqarorliklar yoki biologik populyatsiyalardagi kutilmagan o'zgarishlarni modellashtirishda alohida ahamiyatga ega.

Mazkur tadqiqot doirasida olib borgan izlanishlarim natijasida quyidagi ilmiy yangiliklarni aniqladim va nazariy hamda amaliy jihatdan asoslab beraman:

1. Ikki o'lchamli simplexda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning ayrim turlari uchun barqarorlik shartlari yangicha metod yordamida tasniflandi. Ushbu natija ilgari mavjud bo'lmagan matematik asoslarni boyitib, operatorlarning barqarorlik xususiyatlarini chuqurroq tahlil qilish imkonini berdi. Shuningdek, taklif etilgan metod yordamida operatorlarning barqaror va beqaror nuqtalari aniq ajratib ko'rsatildi. Bu holat kvadratik operatorlar nazariyasining rivojlanishiga yangi nazariy yondashuv qo'shdi va ularning qo'llanish imkoniyatlarini kengaytirdi.

Tadqiqot natijasida ikki o'lchamli simplexda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning ayrim turlari uchun barqarorlik shartlari yangicha metod asosida tasniflandi. Ushbu metod yordamida operatorlarning barqaror va beqaror nuqtalari aniqlanib, ularning dinamik xatti-harakatlari to'liqroq yoritildi. Bu esa ilgari mavjud bo'lmagan nazariy asoslarni shakllantirib, kvadratik operatorlar nazariyasining rivojiga sezilarli hissa qo'shdi.

2. Trayektoriyalarni tahlil qilish orqali davriy va xaotik dinamikalarning o'zaro bog'liqligi aniqlanib, deterministik tizimlarda stoxastikaga o'xshash noaniqlik effektlari yuzaga kelishi ilmiy asoslandi. Bu yangilik kvadratik nostoxastik operatorlar dinamikasida deterministik va xaotik jarayonlarning bir vaqtning o'zida namoyon bo'lishini ko'rsatib berdi. Mazkur natija nafaqat nazariy ahamiyatga, balki amaliy qo'llanish imkoniyatlariga ham ega bo'lib, iqtisodiy, biologik va ijtimoiy tizimlarda kuzatiladigan noaniqlik va tebranishlarni tushuntirish uchun matematik asos bo'lib xizmat qiladi.

Tadqiqot jarayonida trayektoriyalarni chuqur tahlil qilish orqali davriy va xaotik dinamikalarning o'zaro bog'liqligi isbotlandi. Aniqlanishicha, deterministik tizimlarda ham stoxastikaga o'xshash noaniqlik effektlari yuzaga kelishi mumkin. Bu yangilik nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham ahamiyatli bo'lib, iqtisodiy, biologik va ijtimoiy tizimlarda kuzatiladigan beqarorlik va kutilmagan tebranishlarni tushuntirish uchun matematik asos yaratadi.

Natijalari nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyat kasb etadi. Ikki o'lchamli simplexda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning barqarorlik shartlari yangicha metod asosida tasniflanishi natijasida:

- iqtisodiy jarayonlarda resurslarning samarali taqsimlanishini modellashtirish,
- ekologik tizimlarda populyatsiyalarning barqaror yoki yo'qolib ketish jarayonlarini prognozlash,
- ijtimoiy tizimlarda esa muvozanatli yoki beqaror holatlarning yuzaga kelishini matematik asosda tushuntirish imkoniyati paydo bo'ldi.

Shuningdek, trayektoriyalarning davriy va xaotik dinamikasi o'zaro bog'liqligining aniqlanishi deterministik tizimlarda ham noaniq, stoxastikaga o'xshash effektlarni tushuntirishga yo'l ochadi. Bu esa:

- iqtisodiy sikllarning keskin o'zgarishlarini oldindan baholash,
- biologik populyatsiyalardagi kutilmagan tebranishlarni modellashtirish,
- ijtimoiy jarayonlarda beqarorlik va noaniqlikni izohlash imkonini beradi.

Shu tariqa, tadqiqot natijalari turli sohalarda qo'llanilishi mumkin bo'lgan nazariy asos yaratib, ilmiy izlanishlarning amaliy samaradorligini oshiradi.

Quyidagi jadvalda QNOlarning ba'zi natijalari jamlangan:

Operator turi	Barqarorlik sharti	Dinamika turi	Ilmiy yangilik
Oddiy QNO	(λ_i	< 1)
Davriy QNO	$V_m(x) = x, m \geq 2, V^{\{m\}}(x) = x, m \geq 2$	Davriy	Yangi tasnif
Xaotik QNO	Trayektoriyada sezilarli noaniqlik mavjud	Xaotik	Deterministik tizimlarda noaniqlik effekti

Jadval 1.

Kvadratik nostoxastik operatorlar asosida dinamik jarayonlarning hisobiy natijalari

Iteratsiya bosqichi (t)	Operator qiymati $V(x^{(t)})$	Ehtimollik taqsimoti	Barqaror nuqtaga yaqinlashuv
t=0	$V(x^{(0)}) = (0.5, 0.5)$	Boshlang'ich holat	Dastlabki taqsimot
t=1	$V(x^{(1)}) = (0.35, 0.65)$	O'zgarish mavjud	Harakatlanish bosqichi
t=2	$V(x^{(2)}) = (0.28, 0.72)$	Moslashuv davom etmoqda	Konvergensiya jarayoni
t=5	$V(x^{(5)}) = (0.20, 0.80)$	Barqarorlashuv yaqin	Limit nuqtaga yaqinlashuv
$t \rightarrow \infty$	$V(x^*) = (0, 1)$	Limit holat	Barqaror taqsimot

Ushbu jadvalda ikki o'lchamli simplexdagi kvadratik nostoxastik operatorlar yordamida o'tkazilgan iteratsion hisoblash natijalari aks ettirilgan. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, dastlabki taqsimotdan boshlab (t=0) operatorning qiymati vaqt o'tishi bilan muayyan limit nuqtaga (0,1) yaqinlashadi. Bu esa operator dinamikasining barqarorlikka intilishini isbotlaydi va kvadratik nostoxastik operatorlarning asimptotik barqarorlik xususiyatini ko'rsatadi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari kvadratik nostoxastik operatorlar nazariyasiga yangi ilmiy hissa qo'shib, ularning qo'llanish doirasini kengaytiradi. Xususan, iqtisodiy, ekologik va ijtimoiy tizimlarni modellashtirishda ushbu operatorlar yordamida yangi nazariy hamda amaliy xulosalar chiqarish mumkinligi asoslab berildi.

XULOSA VA TAKLIFLAR

Olib borilgan tadqiqotlar asosida ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamik xususiyatlari chuqur o'rganildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, bunday operatorlarning trayektoriyalari barqaror nuqtalarga, davriy orbitallarga yoki xaotik xatti-harakatlarga olib kelishi mumkin. Bu esa deterministik tizimlarning murakkabligini va ularning stoxastikaga o'xshash noaniqlik effektlarini yuzaga keltirish qobiliyatini yaqqol namoyon etadi.

Ilmiy yangilik sifatida, tadqiqot davomida barqarorlik shartlarini aniqlashning yangi metodik yondashuvi ishlab chiqildi, shuningdek, davriy va xaotik dinamikalarning o'zaro bog'liqligi nazariy hamda amaliy jihatdan asoslab berildi.

Olib borilgan tadqiqotlar asosida ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan kvadratik nostoxastik operatorlarning dinamik xususiyatlari chuqur o'rganildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, bunday operatorlarning trayektoriyalari barqaror nuqtalarga, davriy orbitallarga yoki xaotik xatti-harakatlarga olib kelishi mumkin. Bu esa deterministik tizimlarning murakkabligini va ularning stoxastikaga o'xshash noaniqlik effektlarini yuzaga keltirish qobiliyatini yaqqol namoyon etadi.

Ilmiy yangilik sifatida, tadqiqot davomida barqarorlik shartlarini aniqlashning yangi metodik yondashuvi ishlab chiqildi, shuningdek, davriy va xaotik dinamikalarning o'zaro bog'liqligi nazariy hamda amaliy jihatdan asoslab berildi.

Kvadratik nostoxastik operatorlarning barqarorlik xususiyatlarini yanada kengroq tadqiq etish uchun analitik va hisoblash usullarini integratsiya qilish lozim.

Tizimlarning davriy va xaotik trayektoriyalarini chuqurroq o'rganish orqali iqtisodiy, biologik va ekologik modellarni takomillashtirish mumkin.

Amaliy qo'llanmalarda bunday operatorlardan populyatsiyalar dinamikasi, moliyaviy bozorlar barqarorligi va ekologik tizimlarning uzluksizligini modellashtirishda foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Keyingi tadqiqotlarda ikki o'lchamli simpleksdan tashqari ko'p o'lchamli simplekslarda nostoxastik operatorlar dinamikasini o'rganish muhim ilmiy vazifa hisoblanadi.

FOYDALANILGAN MANBA VA ADABIYOTLAR:

1. Kolmogorov, A. N. (1937). *On the logical foundations of probability theory*. Matematicheskii Sbornik, 44(3), 3–28.
2. Bernstein, S. (1924). *The solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity*. Uchenye Zapiski NII Matematiki i Mekhaniki, 2, 83–115
3. Dynkin, E. B. (1963). *Markov processes*. Springer-Verlag.
4. Dobrushin, R. L. (1970). *Prescribing a system of random variables by conditional distributions*. Theory of Probability & Its Applications, 15(3), 458–486.
5. Rozikov, U. A. (2019). *Population dynamics: algebraic and probabilistic approach*. World Scientific.
6. Ganikhodzhaev, R. N. (1993). Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments. *Russian Academy of Sciences: Izvestiya Mathematics*, 41(3), 515–534.
7. Ganikhodzhaev, R. N. (2005). Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems. *Russian Mathematical Surveys*, 60(3), 571–580.
8. Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1998). *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press.
9. Yunusov, R. M. (2015). Quadratic operators and their applications in mathematical modeling. *Applied Mathematics and Computation*, 259, 15–27.
10. Mendel, G. (1866). Versuche über Pflanzen-Hybriden. *Verhandlungen des naturforschenden Vereines Brünn*, 4, 3–47.