



## MATEMATIKANI O'QITISHDA "LEBEG" VA "LEBEG-STILTES" INTEGRALLARINI QO'LLASH.

Otamurodov Nurmuhammad Shuhrat o'g'li

Buxoro viloyati Olot tumani

Ixtisoslashtirilgan maktabining

11-sinf o'quvchisi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.10803871>

### ARTICLE INFO

Received: 08th March 2024

Accepted: 09th March 2024

Published: 11th March 2024

### KEYWORDS

"Lebeg", "Lebeg-Stiltes", to'plam, kamayish, o'sish oraliqlari, funksiya, o'lchovli diskret, cheksiz kamayuvchi geometrik funksiya, qatorlar.

### ABSTRACT

Ushbu maqolada matematikada muhim o'rin tutgan integral mavzusini keng ma'noda yoritib berilgan va misollar keltirilgan

Luzin Teoremasi:  $[a, b]$  kesmada aniqlangan  $f$  funksiya o'lchovli bo'lishi uchun ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun  $[a, b]$  da uzluksiz bo'lgan shunday  $\varphi$  funksiya mavjud bo'lib,  $\mu\{x \in [a, b]: f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$  tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

$[a, b]$  kesmada uzluksiz funksiya o'lchovidir.

Misol:  $[0; \pi]$  kesmada aniqlangan

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \setminus Q \\ \cos^2(\sin x), & x \in Q \end{cases}$$

funksiya o'lchovli bo'ladimi?

Yechish. Luzin teoremasi natijasiga ko'ra, uzluksiz  $\varphi(x) = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  funksiya o'lchovli bo'ladi. Luzin teoremasi va

$$\mu\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} = \mu([0, \pi] \cap Q) = 0 < \varepsilon$$

tengsizlikdan  $f$  funksiyaning  $[0; \pi]$  kesmada o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

Hamma yerda  $E$  o'lchovli to'plamda aniqlangan o'lchovli  $f$  funksiyaning qaraymiz va  $\mu(E) < +\infty$  deb faraz qilamiz.

Ta'rif. Agar  $f : E \rightarrow R$  o'lchovli bo'lib, uning qiymatlari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lsa, u holda  $f$  sodda funksiya deyiladi.

Teorema. Ko'pi bilan sanoqlita har xil  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  qiymatlarni qabul qiluvchi  $f$  funksiya o'lchovli bo'lishi uchun

$$A_n = \{x \in E : f(x) = y_n\}$$

to'plamlarning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema (O'lchovlilik mezoni).  $f : E \rightarrow R$  funksiya o'lchovli bo'lishi uchun unga tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Riman integrali odatda uzluksiz funksiyalar yoki uzilish nuqtalari juda ko'p bo'lmagan funksiyalar uchun kiritiladi. Riman integrali avval  $[a, b]$  kesmada, keyin esa  $[a, b] \times [c, d]$  to'g'ri to'rtburchakda va hokazo kiritiladi. Lebeg integrali esa ixtiyoriy tabiatli to'plamlarda bir xilda kiritiladi. Hattoki, aniqlanish sohasining hamma yerida uzilishga ega bo'lgan funksiyalar uchun ham Lebeg integralini aniqlash mumkin.

Lebeg integralining Riman integralidan asosiy farqlaridan biri shundaki, u funksiyaning aniqlanish sohasi bo'lgan  $[a, b]$  kesmani bo'laklarga bo'layotganda argument qiymatlarining yaqinligini emas, balki funksiya qiymatlarining yaqinligini hisobga oladi. Keyinchalik biz ko'ramizki, Lebeg integrali Riman integraliga qaraganda katta imkoniyatlarga ega bo'ladi. Avval sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'riflanadi, keyin Lebeg integrali ixtiyoriy o'lchovli funksiyalar sinfi uchun aniqlanadi.

Bizga  $y_1, y_2, \dots, y_n$  qiymatlarni qabul qiluvchi  $f : A \rightarrow R$  sodda funksiya berilgan bo'lsin. U holda

$$\sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k)$$

yig'indi  $f$  sodda funksiyaning  $A$  to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k)$$

kabi belgilanadi.

Agar  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$  qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda  $f$  sodda funksiya  $A$  to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi. (11.3) qatorning yig'indisi  $f$  funksiyaning  $A$  to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n).$$

Agar  $F$  funksiya  $[a;b]$  kesmada aniqlangan kamaymaydigan absolyut uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dF(x)$$

Lebeg-Stiltes integrali  $f(x)F'(x)$  funksiyaning odatdagi

$$\int_a^b f(x)F'(x)dx$$

Lebeg integraliga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

1-Misol:  $\int_0^{\infty} 2^{-x} dF(x)$

Lebeg-Stiltes integralini hisoblang. Bu yerda  $A = [0; \infty)$  yarim o'q,  $F(x) = [x]$  funksiya esa  $x$  ning butun qismiga teng.

Yechish. Ma'lumki,  $F(x) = [x]$  funksiya yordamida hosil qilingan  $\mu_F$  o'lchov diskret o'lchov bo'ladi. U ga ko'ra,

$$\int_0^{\infty} 2^{-x} dF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (F(n) - F(n-0))$$

tenglik o'rinli. Agar  $F(n) - F(n-0) = 1$  tenglikni e'tiborga olsak, so'nggi qator yig'indisini hisoblash mumkin. Bu qator  $b_1 = 1$  va maxraji  $q = \frac{1}{2}$  bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisini ifodalaydi. Demak,

$$\int_0^{\infty} 2^{-x} dF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

2-Misol: Quyidagi Lebeg-Stiltes integralini hisoblang.

$$\int_0^3 (x+1)dF(x).$$

Bu yerda  $A = [0;3]$  kesma,  $F(x) = x^2 + 3$ .

Yechish. Ma'lumki,  $F(x) = x^2 + 3$  funksiya yordamida hosil qilingan  $\mu_F$  o'lchov absolyut uzluksiz o'lchov bo'ladi.

$$\int_0^3 (x+1)dF(x) = \int_0^3 (x+1) \cdot 2x dx$$

tenglik o'rinli. So'nggi integral jadval integrali bo'lib uning qiymati 20 ga teng. Demak,

$$\int_0^3 (x+1)dF(x) = 20.$$

3-Misol:  $A = (0;1]$  oraliqda  $f$  funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x) = n, \text{ agar } x \in A_n = \left( \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

$f$  sodda funksiya  $A = (0;1]$  to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuv-chimi? Agar integrallanuvchi bo'lsa, uning integralini hisoblang.

Yechish. Ma'lumki,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0;1]$$

va  $A_n$  to'plamlar o'zaro keshishmaydi. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'rifiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,  $f$  sodda funksiya  $A = (0;1]$  da integrallanuvchi bo'ladi. Bu holda musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi Dalamber alomatidan foydalanish qulay.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Demak, qator yaqinlashuvchi. Bu yerdan  $f$  sodda funksiyaning Lebeg ma'nosida integrallanuvchiligi kelib chiqadi. Endi qator yig'indisini hisoblaymiz. Uning qisman yig'indisi  $S_n$  uchun

$$S_n = 2S_n - S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} - \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} \right) =$$

$$1 + \left( \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{4} \right) + \dots + \left( \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-1}} \right) - \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$

Bu tenglikda  $n \rightarrow \infty$  da limitga o'tib,

$$\int_{(0;1]} f(x)d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$$

ekanligini olamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Sh.A.Ayupov, M.A.Berdiqulov, R.M.Turg'unboyev. Funktsional analiz. Toshkent. 2008, 106 b.
2. [www.edu.uz](http://www.edu.uz) - O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi sayti.

