



MONOTON KETMA- KETLIKLAR USULI YORDAMIDA TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASH

RAXIMOV NASRIDDIN

O'zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti Matematika kafedrası
mudiri, nasriddin.raximov@inbox.ru
<https://doi.org/10.5281/zenodo.14249192>

ARTICLE INFO

Received: 19 th November 2024

Accepted: 20th November 2024

Published: 29th November 2024

KEYWORDS

Monoton ketma-ketliklar, ta'rif, teorema, tengsizlik, isbot, masala va yechim.

ABSTRACT

Maqolada monoton ketma-ketliklar yordamida ba'zi tengsizliklarni isbotlash usullari ko'rsatib o'tilgan.

Umumta'lim maktablarining matematika kursida tengsizliklarni isbotlash masalasiga kamroq ahamiyat berilgan bo'lsada, ammo ikki musbat sonning o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi orasidagi munosabatni bog'lovchi Koshi tengsizligi hamda bu tengsizlik vositasida isbotlanishi talab qilingan ko'plab tengsizliklar turli xil matematik turnir va olimpiadalarda ko'plab uchraydi. Biz ushbu maqolada monoton ketma-ketliklar usulidan foydalanib tengsizliklarni isbotlash masalasini qarab chiqamiz.

Teorema. a_1, a_2, \dots, a_n sonli ketma-ketlik $a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n$ shartni qanoatlantirsin. $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ yig'indi o'zining eng katta qiymatiga $b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n$ bo'lganda, eng kichik qiymatiga esa $b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n$ bo'lganda erishadi.

Isbot. r va s natural sonlari $r < s \ n$ shartni qanoatlantirsin. Teoremani isbotlash uchun

$$S = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_r c_r + \dots + a_s c_s + \dots + a_n c_n$$

$$S = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_r c_s + \dots + a_s c_r + \dots + a_n c_n$$

yig'indilarni taqqoslash yetarli. Ular uchun

$$S - S = a_r c_s + a_s c_r - a_r c_r - a_s c_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r)$$

munosabatni yoza olamiz. Demak, agar $c_s \ c_r$ bo'lsa, $S \ S$ aksincha, $c_s \ c_r$ bo'lsa, $S \ S$ bo'ladi. Bu esa talab etilgan tasdiqni isbotlaydi.

Natija. Teoremadan ko'rish mumkinki, agar $a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n, b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n$ bo'lsa, u holda b_1, b_2, \dots, b_n sonlarining ixtiyoriy (x_1, x_2, \dots, x_n) o'rin almashtirishlari uchun

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \ a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \quad (1)$$

qo'shtengsizlik o'rinli bo'ladi.

Xorijiy adabiyotlarda (1) qo'shtengsizlik "rearrangement inequality" deb yuritiladi. Qizig'i shundaki, hozirgacha (1) qo'shtengsizlik xattoki rus tilida ham aniq bir nomga ega emas. Uni nomlash uchun "trans-tengsizlik" terminini qo'llashni Xalqaro

matematika olimpiadalarida ishtirok etuvchi Rossiya Federatsiyasi o'quvchilari terma jamoasining ilmiy rahbari N.Agaxanov taklif etgan.

Ta'rif. Agar (a_1, a_2, a_3) va (b_1, b_2, b_3) uchliklardan ikkalasi ham kamaymaydigan (ya'ni $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ va $b_1 \geq b_2 \geq b_3$), yoki ikkalasi ham ortmaydigan (ya'ni $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ va $b_1 \leq b_2 \leq b_3$) bo'lsa, (a_1, a_2, a_3) va (b_1, b_2, b_3) uchliklar *bir xil tartiblangan* deyiladi.

Agar (a_1, a_2, a_3) va (b_1, b_2, b_3) uchliklardan bittasi kamaymaydigan, ikkinchisi esa ortmaydigan bo'lsa, u holda bu uchliklar *turlicha tartiblangan* deyiladi.

Masalan, $(-1, 1, 3)$ va $(2, 5, 7)$ uchliklar bir xil tartiblangan, $(-1, 1, 3)$ va $(7, 5, 2)$ uchliklar esa turlicha tartiblangan.

(a_1, a_2, a_3) va (b_1, b_2, b_3) uchliklar berilgan bo'lsin.

(x_1, x_2, x_3) uchlik b_1, b_2, b_3 sonlarning o'rin almashtirishi bo'lsin.

U holda yuqoridagi teoremaning quyidagi muhim natijalarini qayd etamiz.

1) Agar (a_1, a_2, a_3) va (b_1, b_2, b_3) uchliklar bir xil tartiblangan bo'lsa, u holda

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \geq a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (2)$$

tengsizlik o'rinli.

2) Agar (a_1, a_2, a_3) va (b_1, b_2, b_3) uchliklar turlicha tartiblangan bo'lsa, u holda

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (3)$$

tengsizlik o'rinli.

Endi mavzuga oid ba'zi tengsizliklarni isbotlash usllarini qarab o'tamiz.

1-masala. $a > 0, b > 0, c > 0$ bo'lganda quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Yechim. Yuroridagilarga asosan quyidagi monoton uchliklarni tuzib olamiz.

Aytaylik a, b, c musbat sonlari uchun $a \geq b \geq c$ shart bajarilsin. U holda,

$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

$a \geq b \geq c$ va $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$ lar tartiblangan uchliklar ekanligidan (2) formulaga asosan quyidagilarni yoza olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \end{aligned}$$

Hosil bo'lgan bu musbat hadli tengsizliklarni hadma-had qo'shib yuborsak

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \text{tengsizlik kelib chiqadi.}$$

2-masala. a, b, c sonlari uchburchak tomonlarini ifodalasa quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq 6 \quad (\text{bunda } p - \text{yarim perimetr})$$

Yechim. Umumiylikka ta'sir etmagan holda $a \geq b \geq c$ deb olamiz.

a, b, c va $\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}$ lar tartiblangan uchliklar ekanligidan (2) formulaga asosan quyidagilarni yoza olamiz:

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} = \frac{a}{p-b} + \frac{b}{p-c} + \frac{c}{p-a}$$

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} = \frac{a}{p-c} + \frac{b}{p-a} + \frac{c}{p-b}$$

Hosil bo'lgan bu musbat hadli tengsizliklarni hadma-had qo'shib yuborib

$$2 \left(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \right) - \left(\frac{b+c}{p-a} + \frac{a+c}{p-b} + \frac{a+b}{p-c} \right) \geq 0$$

yoki

$$\frac{3a-2p}{p-a} + \frac{3b-2p}{p-b} + \frac{3c-2p}{p-c} \geq 0$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Bundan esa $\frac{a}{p-a} - 2 + \frac{b}{p-b} - 2 + \frac{c}{p-c} - 2 \geq 0$ ya'ni isbotlanishi talab qilingan tengsizlikka kelamiz.

Bir xil monoton juftliklarni ba'zi funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish masalalariga ham tatbiq etish mumkin.

3-masala. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lganda $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$ funksiyaning minimumini toping.

Yechim. $(\sin^3 x, \cos^3 x)$ va $\frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\sin x}$ bir xil monoton juftliklar bo'lgani uchun

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{\sin^3 x}{1} \cdot \frac{\cos^3 x}{1} = \frac{\sin^3 x}{\sin x} \cdot \frac{\cos^3 x}{\cos x} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

bo'lib, funksiyaning berilgan oraliqdagi eng kichik qiymati 1 ga teng bo'ladi.

4-masala. Musbat haqiqiy x_1, x_2, \dots, x_n sonlari uchun $x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} \geq x_1 x_2 \dots x_n (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ tengsizlikni isbotlang.

Yechim. Agar isbotlanishi talab qilingan tengsizlikni

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_2 & x_3 & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}$$

ko'rinishda yozish bizni maqsadga darhol olib keladi.

Xulosa o'rnida shuni ayta olamizki, tengsizliklarni monoton ketma-ketliklar usulidan foydalanib isbotlash birmuncha qulay hisoblanadi. Bu usuldan matematika fan to'garaklarida, iqtidorli o'quvchilarini olimpiadalarga tayyorlash jarayonlarida foydalanilsa yanada samarali bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Седракян Н. М., А в о я н А. М. Неравенства. Методы доказательства / Пер. с арм. Г. В. Григоряна. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с.
2. N.Raximov. Matematikadan nostandart masalalar, I qism: Akademik litsey va iqtidorli maktab o'quvchilari uchun uslubiy qo'llanma.-Samarqand: 2020y. -132 b.
3. Sh.Ismailov, O.Ibragimov. Tengsizliklar-II. Isbotlashning zamonaviy usullari / Toshkent, 2008 y.

