KOSHI INTEGRAL TEOREMASI.

Rustamov Bilol
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Oliy matematika kafedrasi o'qituvchi
Rustamovb374@gmail.com
Xonqulov Sherzod
Yangiboyeva Mohira
Choriyeva Nozigul
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti talabasi.
https://doi.org/10.5281/zenodo.20487163

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 26-may 2026 yil
Ma'qullandi: 28- may 2026 yil
Nashr qilindi: 30- may 2026 yil

KEY WORDS

Golomorf funksiya,Koshi teoremasi,Koshi integrali,Uchburchak sohasidan integral,yopiq kontur.

ABSTRACT

Biz bu maqolada kompleks analizning asosiy tushunchalaridan biri Koshi teoremasi haqida malumotga ega bo`lamiz va Koshi teoremasini isbotini uchburchak orqali isbotlaymiz va natijalarini ko`ramiz.

1°. Koshi teoremasi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining fundamental teoremasi hisoblanadi.

Biz ushbu paragrafda mazkur teoremani o'rganamiz.

2-teorema (Koshi teoremasi). Agar f(z) funksiya bir bog'lamli D sohada $D \subset C_z$ golomorf bo'lsa, u holda f(z) funksiyaning D sohada yotuvchi har qanday silliq (bo'lakli silliq) γ yopiq chiziq (yopiq kontur) bo'yicha integrali nolga teng bo'ladi:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Isbot. Teoremaning isbotini bir necha bosqichda keltiramiz:

Bu uchburchakning perimetri ℓ ga teng bo'lsin. Bu holda teoremani isbotlash uchun teskarisini faraz qilamiz, ya'ni f(z) funksiya bir bog'lamli D sohada golomorf bo'lsa ham bu funksiyaning D sohada yotuvchi ABC uchburchak konturi Δ bo'yicha integrali nolga teng bo'lmasin:

$$\int_{\Delta} f(z)dz \neq 0.$$

Aytaylik

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| = M > 0$$

bo'lsin

Δ= ABC uchburchakni uning tomonlari o'rtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesimlari yordamida 4 ta

$$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$$

Uchburchaklarga ajratamiz. Ravshanki bu uchburchak konturlari uchun

$$\Delta^{(1)} = aB + Bc + ca,$$
$$\Delta^{(2)} = cA + Ab + bc,$$
$$\Delta^{(3)} = bC + Ca + ab$$
$$\Delta^{(4)} = ac + cb + ba$$

bo'lib

$$\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz = \int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{ca} f(z)dz,$$
$$\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz = \int_{cA} f(z)dz + \int_{Ab} f(z)dz + \int_{bc} f(z)dz,$$
$$\int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz = \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz + \int_{ab} f(z)dz,$$
$$\int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz = \int_{ac} f(z)dz + \int_{cb} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz$$

Bo'ladi. Keyingi tengliklarni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz$$
$$= \left[\int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{ca} f(z)dz + \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz\right]$$
$$+ \left(\int_{ca} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz\right) + \left(\int_{cb} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz\right)$$
$$+ \left(\int_{ab} f(z)dz + \int_{ab} f(z)dz\right).$$

Agar

$$\int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{cA} f(z)dz + \int_{Ab} f(z)dz + \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz = \int_{\Delta} f(z)dz,$$
$$\int_{ca} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz = 0, \qquad \int_{bc} f(z)dz + \int_{cb} f(z)dz = 0,$$
$$\int_{ab} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz = 0$$

Bolishini etiborga olsak (9) munosabatdan

$$\int_{\Delta} f(z)dz = \int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz$$

Ekanligi kelib chiqdi.

Ravshanki,

$$M = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| \le \left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz\right|$$

Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilardan kamida bittasi $\frac{M}{4}$ dan kichik bo'ladi (aks holda

$$M = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| < 4 \cdot \frac{M}{4} = M$$

Bo'lib $M < M$ kabi manosiz tengsizlikka kelib qoladi).
Aytaylik,

$$\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4}$$

Bo'lsin bunda Δ_1 uchburchak $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ uchburchaklardan biri va uning peremetri $\frac{1}{2^n}$ ga teng.

Endi Δ_1 uchburchak yuqoridagi usul bilan 4 ta $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ uchburchaklarga ajratamiz. Bu uchburchaklar orasida Δ_2 uchburchak topiladi

$$\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^2}$$

Bo'ladi Δ_2 uchburchakning peremetri $\frac{l}{2^2}$ ga teng

Bu jarayonni cheksiz davom ettira boramiz. Natijada

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ (10)

uchburchaklar ketma-ketligi hosil boʻladi. (10) uchburchaklar ketma-ketligi uchun:

$$\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^n} \qquad (11)$$

Bo'ladi

Shartga koʻra f(z) funksiya z_0 nuqtada golomorf. Demak,

son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon))$ son topiladiki,

$$|z - z_0| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z lar uchun

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z)\right| < \varepsilon$$

ya'ni

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)| < \varepsilon \cdot |z - z_0| \qquad (13)$$

Bo'ladi

Endi (2) va (4) formulalarga ko'ra

$$\int_{\Delta_n} dz = 0 \qquad \int_{\Delta_n} zdz = 0$$

Va n ning yetarlicha katta qiymatida

$\Delta_n \subset \{z \in C_z : |z - z_0| < \delta\}$

boʻlishini hamda (13) tengsizlikni e'tiborga olib topamiz:

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)]dz\right|$$

$$\leq \int_{\Delta_n} |[f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)]| < \varepsilon \cdot \int_{\Delta_n} |z - z_0||dz| < \varepsilon \cdot \frac{l^2}{4^n}$$

(11) va (14) munosabatlardan

$$\frac{M}{4^n} \leq \left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| < \varepsilon \cdot \frac{l^2}{4^n}$$

boʻlishi kelib chiqadi. Demak,

$$M < \varepsilon \cdot l^2$$

Bu tengsizlik $M > 0$ deb qilingan farazga zid (chunki ε— ixtiyoriy musbat son). Ziddiyatlik boʻlmasligi uchun $M = 0$ boʻlishi kerak. Shunday qilib $M = 0$ ya'ni

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0$$

boʻladi.

$$\gamma = P.$$

Ravshanki, koʻpburchak chekli sondagi uchburchaklarga ajraladi va

$$\int_{P} f(z)dz$$

integral esa bu uchburchaklar boʻyicha olingan integrallar yigʻindisiga teng boʻladi. Uchburchaklar boʻyicha olingan integrallarning har biri a) holga binoan nolga teng boʻladi. Binobarin, $f(z)$ funksiyaning koʻpburchak konturi boʻyicha olingan integrali ham nolga teng boʻladi:

$$\int_{P} f(z)dz = 0$$

γ egri chiziq ixtiyoriy silliq (boʻlakli silliq) yopiq egri chiziq boʻlsin. Integralning 6-xossasiga koʻra D sohaga tegishli boʻlgan shunday P koʻpburchak topiladiki,

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{P} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

ε — ixtiyoriy musbat son b) holga binoan

$$\int_{P} f(z)dz = 0$$

Demak

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

Bundan esa

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Foydalanilgan adbiyotlar:

1. G.Xudoyberganov, A.Vorisov, H.Mansurov. Kompleks analiz (maruzalar) toʻplami "Universitet" nashiryoti-1998.
2. A.Sadulayev, G.Xudoyberganov, H.Mansurov va boshqalar Matematik analiz kursidan misol va masalalar [3-kitob] (kompleks analiz) "Oʻzbekiston" 2000-y.
3. T.T.Toʻychiyev, J.K.Tishabayev, D.X.Djumabayev, A.M.Kitmanov Kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidan mustaqil ishlar Oʻquv qoʻllanma. – Toshkent: MUMTOZ SOʻZ, 2018. – 220 bet.
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-нашри, 1-қ.-М. Наука, 1976.
5. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3-нашри. – М. Наука,

6. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Сборник задач по теории аналитических функций, 2- нашри. –М. Наука 1972.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-нашри. –М. Наука, 1973.
8. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М. Наука, 1976.