MATRITSALAR VA DETERMINANTLAR NAZARIYASI: ZAMONAVIY QO'LLANILISHI.

Ruziboyeva Oqila Shonazar qizi
Qarshi davlat universiteti o'qituvchisi e-mail:
oqilaruziboyeva2905@gmail.com
+998773923939
O'ralova Mohinur Fayzulla qizi
Qarshi davlat universiteti o'qituvchisi e-mail:
mohinururolova20@gmail.com
+998908084268
https://doi.org/10.5281/zenodo.17778852

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 25-noyabr 2025 yil
Ma'qullandi: 28-noyabr 2025 yil
Nashr qilindi: 30-noyabr 2025 yil

KEY WORDS

Matritsa, determinant, chiziqli algebra, tizim transformatsiyasi, eigen qiymat, kompleks tizim, amaliy misol.

ABSTRACT

Ushbu maqolada matritsalar va determinantlar nazariyasining zamonaviy qo'llanilishi, chiziqli algebra vositalari yordamida kompleks tizimlar va transformatsiyalarni o'rganish metodlari tahlil qilinadi. Matritsa va determinant tushunchalarining nazariy asoslari yoritilib, ularning kompyuter modellashtirish, iqtisodiy tizimlar va fizika sohalarida qo'llanilishi misollar bilan ko'rsatiladi. Shuningdek, maqolada amaliy masalalar yechimlari va tahlil natijalari berilgan.

Matritsalar va determinantlar nazariyasi chiziqli algebra asoslarini tashkil qiladi. Ular matematik va injenerlik sohalarida, shuningdek, iqtisodiyot, fizika, kimyo va kompyuter ilmida keng qo'llaniladi. Matritsalar yordamida tizimlar parametrlarini o'rganish, transformatsiyalarni tahlil qilish va kompleks muammolarni yechish osonlashadi [1]. Determinantlar esa tizimning yechim mavjudligi va o'ziga xos xususiyatlarini aniqlash uchun muhim vosita hisoblanadi.

Chiziqli algebra vositalari bilan ishlash zamonaviy ilmiy tadqiqotlarda murakkab tizimlarni modellashtirish, robototexnika, signalni qayta ishlash, moliyaviy analiz va ma'lumotlarni optimizatsiya qilishda qo'llaniladi [2]. Bu maqolada matritsalar va determinantlar nazariyasining amaliy ahamiyati va zamonaviy qo'llanilishi yoritiladi.

Metodologiya

Matritsalar va determinantlar nazariyasi quyidagi metodlar yordamida tahlil qilindi:

- Matritsa operatsiyalari (qo'shish, ko'paytirish, invers matritsa) va determinant hisoblash algoritmlari [3].
- Eigen qiymatlar va eigen vektorlar orqali tizim transformatsiyalarini o'rganish [4].
- Chiziqli tenglamalar sistemalarini matritsa ko'rinishida yechish (Gauss usuli, Cramer qoidasi) [5].
- Amaliy modellashtirish: iqtisodiy, mexanik va fizik tizimlar uchun matritsalar asosida transformatsiyalar va prognozlash [6].

Natijalar

1,Matritsalar va determinantlar nazariyasi:

Matritsa – bu sonlardan tashkil topgan to‘liq to‘plam bo‘lib, u chiziqli transformatsiyalarni ifodalaydi. Determinant – kvadrat matritsaning o‘ziga xos qiymati bo‘lib, u matritsaning invers mavjudligini belgilaydi. Masalan, 2x2 matritsa

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uchun determinant $\det(A) = ad - bc$[7].

2,Tizim transformatsiyalari:

Chiziqli tizimni $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ shaklida ifodalash mumkin, bu yerda A matritsa, $\mathbf{x}$ kirish vektori va $\mathbf{y}$ chiqish vektori hisoblanadi. Eigen qiymatlar yordamida tizimning stabil yoki o‘zgaruvchan xususiyatlarini aniqlash mumkin [8].

3,Amaliy misol

Iqtisodiy tizimni ko‘rib chiqaylik, unda uchta sektor mavjud: A, B, C. Har bir sektor boshqa sektorlar bilan mahsulot almashadi. Transformatsion matritsa:

$$T = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Bu yerda har bir element sektorlar orasidagi resurs almashinuv koeffitsienti.

Determinant $\det(T) = 0.3 * (0.5 * 0.4 - 0.2 * 0.1) - 0.2 * (0.1 * 0.4 - 0.2 * 0.2) + 0.1 * (0.1 * 0.1 - 0.5 * 0.2) = 0.034$. Determinant nolga teng emasligi tizimning yechimga ega ekanligini bildiradi [9].

4,Chiziqli tenglamalar yechimi:

Masala:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Matritsa ko‘rinishida:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cramer qoidasi bilan: $x = \det(A_x)/\det(A)$, $y = \det(A_y)/\det(A)$, $z = \det(A_z)/\det(A)$[10].

Tahlil va muhokama

Matritsalar va determinantlar nazariyasi chiziqli algebra asosida murakkab tizimlarni tahlil qilish va modellashtirishda eng muhim vositalardan biridir. Zamonaviy ilm-fan va texnologiyada ko‘plab tizimlar chiziqli yoki yaqin chiziqli model orqali ifodalanadi. Shu bois, matritsa operatsiyalari va determinantlar orqali tizimlarning xatti-harakatlarini aniqlash, barqarorligini baholash va optimal yechimlarni topish mumkin. Matritsa va determinantlar yordamida ishlashning afzalligi shundaki, ular bir vaqtning o‘zida bir nechta parametrlar va tenglamalar bilan ishlash imkonini beradi. Masalan, iqtisodiy tizimlarda resurs almashinuvi, moliyaviy modellar va ishlab chiqarish jarayonlarining interaktiv aloqalari matritsa orqali qulay ifodalanadi [1].

Chiziqli tizimlarda eigen qiymatlar va eigen vektorlar tahlilning markaziy elementi hisoblanadi. Eigen qiymatlar tizimning barqaror yoki o‘zgaruvchan xattiharakatlarini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Agar barcha eigen qiymatlar modul jihatdan birga bo‘lsa va

1 dan kichik bo‘lsa, tizim barqaror deb hisoblanadi; aks holda tizim instabil yoki osilatsiyaga moyil bo‘ladi. Masalan, mexanik tizimlarda massalarning o‘zaro ta’siri va kuchlarning taqsimlanishi matritsalar orqali ifodalanadi, eigen qiymatlar esa tizimning tabiiy chastotalarini aniqlash imkonini beradi [2].

Amaliy misol sifatida iqtisodiy tizimni ko‘rib chiqamiz. Uchta sektor mavjud bo‘lsin: A, B va C. Har bir sektor boshqa sektor bilan mahsulot almashadi. Bu tizimni transformatsion matritsa orqali ifodalaymiz:

$$T = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Bu yerda T_{ij}elementi i-sektorning j-sektor bilan almashinuv koeffitsientini bildiradi. Determinant $\det(T) = 0.054$, ya’ni nolga teng emas, bu tizimning yechimga ega ekanligini va barcha sektorlar o‘zaro bog‘langanini ko‘rsatadi [3]. Agar determinant nolga teng bo‘lganida, tizimning ba’zi sektorlararo aloqalari muammoli bo‘lib, barqaror yechim topish imkonsiz bo‘lar edi.

Shuningdek, chiziqli tenglamalar sistemasi misolida 3x3 tizimni yechish mumkin:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

Bu tizim matritsa ko‘rinishida quyidagicha ifodalanadi:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Cramer qoidasi yordamida yechimni topamiz. Determinant $\det(A) = 3 * (-1 * 3 - 1 * 2) - 1 * (2 * 3 - 1 * 1) + (-2) * (2 * 2 - (-1 * 1)) = -21$.

Determinant nolga teng emasligi, tizimning yagona yechimga ega ekanini bildiradi [4]. Matritsa orqali yechimni topish algoritmlari MATLAB yoki Python dasturlari yordamida tez va aniq amalga oshiriladi.

Kompyuter vositalari yordamida matritsa va determinantlar nazariyasining qo‘llanilishi yanada kengayadi. Masalan, MATLAB yoki NumPy kutubxonasi yordamida 100x100 o‘lchamli matritsalar bilan ishlash mumkin. Bu murakkab tizimlarni simulyatsiya qilish va transformatsiyalarni tahlil qilishda katta qulaylik beradi. Fizika va injenerlik masalalarida massalar, kuchlar va tezlanishlar matritsalar orqali ifodalanadi. Eigen qiymatlar tizimning tabiiy chastotalarini aniqlashga yordam beradi va tizimning rezonans holatlarini bashorat qilish imkonini yaratadi [5].

Matritsalar nazariyasining yana bir zamonaviy qo‘llanilishi – ma’lumotlarni optimizatsiya qilish va tarmoq modellashtirishdir. Masalan, transport tizimida avtoulovlar yo‘nalishlarini matritsa orqali ifodalash mumkin, bu yerda satrlar boshlang‘ich nuqtalarni, ustunlar esa manzil nuqtalarni bildiradi. Determinantlar esa tizimning optimal ishlashini tahlil qilishda foydalidir. Agar determinant nolga teng bo‘lsa, yo‘nalishlarda muammolar borligini bildiradi [6].

Chiziqli algebra vositalari moliyaviy tizimlarda ham qo‘llaniladi. Masalan, portfelni diversifikatsiya qilish, risklarni baholash va investitsiya strategiyalarini modellashtirish uchun matritsalar ishlatiladi. Har bir investitsiya instrumenti satr yoki ustun sifatida ko‘rsatiladi, korrelyatsiya matritsasi esa investitsiyalarning birbiriga bogʻliqligini aniqlash imkonini beradi. Eigen qiymatlar portfelning asosiy risk manbalarini aniqlashda muhim rol oʻynaydi [7].

Amaliy misol sifatida mexanik tizimni koʻrib chiqamiz. Uchta massali va uchta bahorli tizimni tasavvur qilaylik. Massalar va bahorlar oʻzaro matritsa orqali bogʻlangan. Tizimning massalar va bahorlar matritsasi Mva Kboʻlsin. Tabiiy

chastotalar ωquyidagi xususiy tenglama orqali topiladi:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

Bu yerda determinantning nolga tengligi tizimning xususiy (eigen) chastotalarini aniqlash imkonini beradi. Ushbu yondashuv mexanik tizimlarning stabil yoki rezonans holatini bashorat qilishda keng qoʻllaniladi [8].

Shuningdek, signallarni qayta ishlash va telekommunikatsiya sohasida matritsalar va determinantlar yordamida filtrlar va tizimlar modellashtiriladi. Masalan, uchkanallikli signal tizimida har bir kanalni matritsa orqali ifodalash mumkin. Determinantlar tizimning yechimga ega boʻlishi va signallarni barqaror uzatishni taʼminlaydi. Eigen qiymatlar esa signallarning asosiy komponentlarini aniqlashga yordam beradi [9].

Murakkab tizimlarda tahlilning yana bir muhim jihati – tizimning barqarorligini baholashdir. Eigen vektorlar tizimning asosiy yoʻnalishlarini aniqlashga yordam beradi. Agar eigen qiymatning moduli 1 dan katta boʻlsa, tizim vaqt oʻtishi bilan barqarorligini yoʻqotadi. Shu bilan birga, eigen vektorlar tizimning asosiy yoʻnalishlarini koʻrsatadi va oʻzgarishlarni tahlil qilishda foydalidir [10].

Matritsalar va determinantlar yordamida murakkab tizimlarning modellashtirilishi nafaqat fizik yoki iqtisodiy tizimlarda, balki biologik, ekologik va ijtimoiy tizimlarda ham qoʻllaniladi. Masalan, populyatsiyalar oʻzaro taʼsirini oʻrganishda Lotka-Volterra tizimi matritsa koʻrinishida ifodalanadi. Bu yerda determinantlar populyatsiyaning barqaror yoki barqaror emasligini aniqlashda yordam beradi [11].

Amaliy mashqlar orqali talabalar va tadqiqotchilar matritsa va determinantlar nazariyasini yanada mustahkamlashlari mumkin. Misol uchun, 4x4 matritsalar bilan ishlash, determinant hisoblash va eigen qiymatlarni topish, shuningdek tizim barqarorligini tahlil qilish – bularning barchasi amaliy koʻnikmalarni rivojlantiradi. Shuningdek, kompyuter dasturlari yordamida matritsa transformatsiyalarini simulyatsiya qilish tizimlarning xatti-harakatini vizual tarzda koʻrish imkonini beradi [12].

Natijada, matritsalar va determinantlar nazariyasi nafaqat chiziqli algebra asoslarini oʻrgatadi, balki murakkab tizimlarni tahlil qilish, transformatsiyalarni modellashtirish va amaliy masalalarni yechish uchun zarur vosita hisoblanadi. Amaliy misollar iqtisodiy, mexanik, moliyaviy va signallarni qayta ishlash sohalarida nazariyaning samarali qoʻllanilishini koʻrsatadi.

Xulosa

Matritsalar va determinantlar nazariyasi zamonaviy ilm-fan va texnologiyada keng qoʻllaniladi. Chiziqli algebra vositalari murakkab tizimlar va transformatsiyalarni tahlil qilishda muhim vosita hisoblanadi. Amaliy misollar koʻrsatganidek, bu nazariya iqtisodiy tizimlar, fizik modellar va kompyuter modellashtirishda samarali qoʻllaniladi. Determinantlar tizimning yechim mavjudligini aniqlashda muhim ahamiyatga ega, eigen qiymatlar esa tizim barqarorligini tahlil qilishda qoʻllaniladi.

Foydalanilgan adabiyot roʻyxati:

1. Strang, G. Linear Algebra and Its Applications. 5th ed., Boston: Cengage Learning, 2016, p. 45-78.
2. Anton, H., Rorres, C. Elementary Linear Algebra. 11th ed., Wiley, 2013, p. 120-155.
3. Lay, D. C. Linear Algebra and Its Applications. 5th ed., Pearson, 2015, p.
4. 200-234.
5. Trefethen, L. N., Bau, D. Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997, p. 78101.
6. Golub, G. H., Van Loan, C. F. Matrix Computations. 4th ed., Johns Hopkins University Press, 2013, p. 310-345.
7. Meyer, C. D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, 2000, p. 150-180.
8. Horn, R. A., Johnson, C. R. Matrix Analysis. 2nd ed., Cambridge University Press, 2013, p. 56-90.
9. Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E. Linear Algebra. 4th ed., Prentice Hall, 2003, p. 210-245.
10. Chiang, A. C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. 4th ed., McGraw-Hill, 1984, p. 95-120.
11. Kreyszig, E. Advanced Engineering Mathematics. 10th ed., Wiley, 2011, p. 540-580.
12. Meyer, C. D. Introduction to Linear Algebra and Applications. SIAM, 2001, p. 220-250.
13. Heideman, M. T., Johnson, D. H., Burrus, C. S. Gauss and the Determinant. IEEE, 1984, p. 15-42.