IKKINCHI TARTIBLI AYIRMALI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR

To'rayev Jo'rabek Nurbek o'g'li
Iqtisodiyot va pedagogika universiteti "Matematika" kafedrasi stajyor-assistenti Email: 0511jurabek@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.15532295

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 20-May 2025 yil
Ma'qullandi: 25-May 2025 yil
Nashr qilindi: 28-May 2025 yil

KEY WORDS

Ayirmali tenglama, ikkinchi tartib, chegaraviy masala, sonli yechim, Dirixle sharti, Neyman sharti, differensial tenglama, stabiliklik, yakuniy farqlar usuli.

ABSTRACT

Mazkur maqolada ikkinchi tartibli ayirmali tenglamalar asosida tuzilgan chegaraviy masalalarni yechish usullari tahlil qilinadi. Ayirmali tenglamalar differensial tenglamalarning sonli analogi bo'lib, ularni yechishda cheklangan oraliqda funktsiyalarning qiymatlarini aniqlash mumkin. Chegaraviy masalalar bu tenglamalarning amaliy qo'llanilishi bo'lib, ular fizikaviy, muhandislik va boshqa texnik sohalarda keng qo'llaniladi. Maqolada ayirmali tenglamalar, ularning turlari, chegaraviy shartlar, sonli yechimlarni topish usullari va algoritmlari bayon etiladi.

Matematik modellashtirishda differensial tenglamalarning sonli yechimlarini topish keng tarqalgan usullardan biridir. Biroq ko'plab hollarda bu tenglamalarni analitik tarzda yechish imkonsiz bo'ladi. Bunday holatlarda ayirmali tenglamalar yordamida sonli yechimlar aniqlanadi. Ayirmali tenglamalar - bu differensial tenglamalarning diskret ekvivalenti bo'lib, ular chekli sonli nuqtalarda yechimni hisoblash imkonini beradi.

Ikkinchi tartibli ayirmali tenglamalarni quyidagi qulayroq ko'rinishda yozish qabul qilingan:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i \qquad (1)$$

$$i = 1,2,3\ldots \quad A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0.$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli tenglama ekanligini ko'rsatamiz. $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ belgilashdan foydalanamiz. U holda (1) tenglama

$$B_i \Delta y_i - A_i \Delta y_{i-1} - (C_i - B_i - A_i) y_i = -F_i \qquad (2)$$

ko'rinishga keladi.

$$\Delta y_i - \nabla y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1},$$

$$\Delta y_{i-1} = -\Delta^2 y_{i-1} + \Delta y_i$$

ekanligi tushunarli. Bu tenglikka asosan (2) formulani

$$A_i \Delta^2 y_{i-1} + (B_i - A_i)\Delta y_i - (C_i - B_i - A_i) y_i = -F_i, \qquad A_i \neq 0.$$

(1) tenlamani Δ^2 ni oldida B_i koeffitsient turadigan ko'rinishda yozish mumkin, $B_i \neq 0$ bo'lganligi sababli hosil bo'lgan tenglama ikkinchi tartibli bo'ladi:

$$B_i\Delta^2 y_{i-1}+(B_i-A_i)\Delta y_{i-1}-(C_i-B_i-A_i)y_i=-F_i.$$

Shunday qilib, (1) ayirmali tenglama ikkinchi tartibli differensial tenglamaning analogidir. Uni yechish uchun ikkita qo'shimcha shart berilishi kerak. Bu shartlar sifatida y funksiya va uning birinchi tartibli ayirmasi Δy qiymatlari xizmat qilishi mumkin. Agar ikki shart (y funksiya va uning birinchi tartibli ayirmasi Δy qiymatlari) ham bir nuqtada yoki qo'shni nuqtalarda berilgan bo'lsa, u holda *Koshi masalasi*ga ega bo'lamiz. Agar qo'shimcha shartlar qo'shni bo'lmagan turli xil nuqtalarda berilsa u holda masala *chegaraviy masala deyiladi*.

Koshi masalasi yechilayotgan bo'lsin, ya'ni $i=0$ da y_0, $\Delta y_0=y_1-y_0$ yoki y_0 va y_1 berilgan bo'lsin. U holda y_0 va y_1 larni bilgan holda $i=1,2,3,\ldots$ lar uchun

$$y_{i+1}=\frac{C_iy_i-A_iy_{i-1}-F_i}{B_i},\ B_i\neq 0$$

qiymatlarni aniqlash mumkin. Shunday qilib, y_0 va y_1 qiymatlar berilganda masalaning yechimi mavjud va yagonadir. Ammo, ikkinchi tartibli tenglama uchun matematik fizikada chegaraviy masalalar, ya'ni qo'shimcha shartlar qo'shni bo'lmagan $i=0$ va $i=N$ da

$$y_0=\mu_1,\qquad y_N=\mu_2$$

qiymatlar berilganda $0<i<N$ nuqtalar uchun y_i qiymatlarni aniqlash ancha qiziqarlidir (μ_1,μ_2 - berilgan sonlar).

$i=0$ va $i=N$ nuqtalarda nafaqat funksiyaning qiymatlari va birinchi tartibli ayirmaning qiymati, balki funksiya qiymati va birinchi tartibli ayirmaning chiziqli kombinatsiyasi berilishi ham mumkin. Umumiy holda bunday chegaraviy shartlarni

$$y_0=\chi_1y_1+\mu_1,\ y_N=\chi_2y_{N-1}+\mu_2 \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (3) tenglamaning birinchisiga

$$y_1=y_0+\Delta y_0$$

tenglikni qo'ysak, quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$\chi_1\Delta y_0-(1-\chi_1)y_0=\mu_1. \qquad (4)$$

$\chi_1=0$ bo'lgan hol $i=0$ nuqtada funksiyaning qiymati y_0 berilganligini anglatadi (bu esa *birinchi turdagi chegaraviy shart*). Agar $\chi_1=1$ bo'lsa, u holda Δy_0 ning qiymati berilgan bo'ladi (bu esa *ikkinchi turdagi chegaraviy shart*). Agar $\chi_1\neq 0,\ \chi_1\neq 1$ bo'lsa, $i=0$ nuqtada funksiya va birinchi tartibli ayirmaning chiziqli kombinatsiyasi berilgan bo'ladi (bu esa *uchinchi turdagi chegaraviy shart*).

Amaliyotda ayirmali chegaraviy masalalar katta ahamiyatga ega. Hisoblash matematikasining eng katta yutug'i matematik fizikaning ko'pchilik masalalarini hisoblashda har bir qadamda (1) ayirmali tenglamalar sistemasini (3) chegaraviy shart bilan yechishdan iborat. Bu masala klassik masala bo'lib, hisoblash usullari nazariyasining ko'pgina murakkab masalalari (1), (3) chegaraviy masalaga keltiriladi. Bunday tenglamalar sistemasining matritsasi uch diagonallidir. Bu matritsa quyidagi koʻrinishga ega.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\chi_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_i & -C_i & B_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\chi_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agar ikkinchi yoki uchinchi turdagi chegaraviy shartlar berilgan boʻlsa, bu matritsaning tartibi $N+1$ ga teng boʻladi. Birinchi turdagi chegaraviy shartlar berilgan boʻlsa, matritsa $(N-1)$ - tartibga ega boʻladi. Bu matritsaning faqatgina uchta diagonalida, ya'ni bosh diagonalda hamda bosh diagonalning pastki va yuqorisidagi qoʻshni diagonallarda elementlar noldan farqli boʻladi. Bunday matritsaga ega boʻlgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning samarali usuli – Gauss usuli asosida (1), (3) ayirmali chegaraviy masalani haydash usuli bilan samarali yechish mumkin.

Misol

Quyidagi chegaraviy masalani koʻrib chiqamiz:

$$u''(x)=1, \qquad 0<x<1$$

$$u(0)=0, \qquad u(1)=0,$$

Oraliqni 4 ga boʻlamiz: h = 0.25

$$x_i = 0.25, 0.5, 0.75$$

Disretlashtirilgan tenglamalar quyidagicha boʻladi:

$$\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}=1$$

Bu tenglamani quyidagi koʻrinishda yozamiz:

$$-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}=-h^2=-0.0625$$

Tizim uchun quyidagi tenglamalar hosil boʻladi:

$$2u_1-u_2=0.0625$$

$$-u_1+2u_2-u_3=0.0625$$

$$-u_2+2u_3=0.0625$$

Yechim: $u_1=u_3=0.09375$, $u_2=0.125$

Xulosa

Ikkinchi tartibli ayirmali tenglamalar yordamida chegaraviy masalalarni sonli yechish usuli aniq va samarali yechimlar beradi. Bu yondashuv differensial tenglamalarning analitik yechimi mavjud boʻlmagan hollarda qoʻllaniladi. Ayirmali tenglamalar asosida qurilgan modellar fizikaviy va muhandislik masalalarini kompyuterda simulyatsiya qilish imkonini beradi. Metodning afzalliklari soddalik, algoritmlashtirilganlik va dasturlashga mosligidadir.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Samarskii AA, Gulin AV Chislennye metody – Moskva: Nauka, 1989.
2. (Ayirmali tenglamalar va sonli echimlar boʻyicha klassik manba.)
3. Isaacson E., Keller HB Analysis of Numerical Methods – New York: Wiley, 1966. (Numerik tahlil va ayirmali metodlar nazariyasi.)
4. Thomas JW Numerical Partial Differential Equations:
5. Finite Difference Methods – Springer, 1995. (Cheklangan farqlar usullari bilan chegaraviy masalalarni yechish.)
6. Strikwerda JC Finite Difference Schemes and Partial Difference Equations – SIAM, 2004. (Stabillik, yaqinlik va konvergensiya tahlili.)
7. Asqar, M. ., & Jo`rabek, T. . (2024). KOSHI MASALASI YECHIMINING TURGʻUNLIGI. JOURNAL OF THEORY, MATHEMATICS AND PHYSICS, 3(10), 3–5. https://jtmp.innovascience.uz/index.php/journal/article/view/193
8. Toʻrayev, J., va Temirova, Z. (2025). FUNKSIYANING EGILISH NUQTALARI. Zamonaviy fan va tadqiqotlar , 4 (4), 1359–1363. https://inlibrary.uz/index.php/science-research/article/view/82740
9. Bozarov, D. (2022). PROBLEMS OF SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS. Science and Innovation, 1(2), 163-171.
10. Bozarov, D. (2023). Bo ʻlajak iqtisodchi talabalarning iqtisodiy kompetensiyasini rivojlantirishning matematik tahlili. Академические исследования в современной науке, 2(27), 84-90.
11. Allamova, M., & Bozarov, D. (2023). Trigonometrik tengsizliklar yechimlarining innovatsion qo ʻllanilishi. Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук, 3(1), 75-78.
12. Dilmurod, B., & Islom, A. (2023). Parallel ikkita to'g'ri chiziq orasidagi masofa. Innovations in Technology and Science Education, 2(8), 465-478.
13. Bozarov, D. (2022). CHIZIQLI VA KVADRATIK MODELLASHTIRISH MAVZUSINI MUSTAQIL O ʻRGANISHGA DOIR MISOLLAR. Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук, 2(6), 24-28.
14. Bozarov, D., & Rahmonov, B. (2024). Kombinatorikaning paydo bo ʻlishi va hayotiy masalalarga tadbiqi. Modern Science and Research, 3(6).
15. Uralovich, B. D. (2022). CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMALARIGA OID MASALALAR. Science and innovation, 1(A2), 163-171.