



ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BO'LGAN KVADRATUR FORMULALAR. ROMBERG INTEGRALLASH FORMULASI.

Quvvatov Behruz Ulug'bek o'g'li

Osiyo Xalqaro Universiteti

“Umumtexnik fanlar” kafedrası o'qituvchisi

ulug'bekovich.bekhruz@mail.ru

<https://doi.org/10.5281/zenodo.10699801>

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 15-February 2024 yil

Ma'qullandi: 20- February 2024 yil

Nashr qilindi: 24- February 2024 yil

KEY WORDS

Bir karrali integrallarni son qiymatlari geometrik nuqtai nazardan qisqacha kvadratura deb ataladi.

ABSTRACT

Yangi O'zbekistonimizda yuz berayotgan siyosiy, iqtisodiy, ilmiy – texnikaviy va madaniy o'zgarishlar Oliy ta'lim tizimida ham o'z aksini topmoqda. O'zbekistonda uzluksiz ta'lim – tarbiya tizimini yaratish, shu asosida ta'lim sifatini jahon andozalari darajasiga yetkazish ta'lim sistemasining eng dolzarb vazifasiga aylandi.

Yangi O'zbekistonimizda yuz berayotgan siyosiy, iqtisodiy, ilmiy – texnikaviy va madaniy o'zgarishlar Oliy ta'lim tizimida ham o'z aksini topmoqda. O'zbekistonda uzluksiz ta'lim – tarbiya tizimini yaratish, shu asosida ta'lim sifatini jahon andozalari darajasiga yetkazish ta'lim sistemasining eng dolzarb vazifasiga aylandi.

Hisoblash matematikasi sohasida nazariy izlanishlar asosan, tipik matematik masalalarni yechishning sonli metodlar atrofida guruhlanadi. Bu sohaning klassik masalalaridan biri bu integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini qurishdan iborat.

Bir karrali integrallarni son qiymatlari geometrik nuqtai nazardan qisqacha kvadratura deb ataladi.

Bunday masalalar bilan ko'pincha buyuk olimlar shug'ullanganlar. Masalan: Gauss, Chebishev, Eyler, Nyuton va boshqalar.

Kvadratur formular deganda quyidagi taqribiy tenglikni tushunamiz:

$$\int_B f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (a)$$

bu yerda C_{λ} – kvadratur formulaning koeffitsientlari, $x^{(\lambda)}$ – tugun nuqtalari, N – tugun nuqtalar soni[2].

Faraz qilaylik $f(x)$ uzluksiz funksiyani $[a,b]$ kesmada aniq integralni taqribiy hisoblovchi formulani qurish talab qilinsin.

Integralning eng sodda taqribiy ifodasi asosan $[a,b]$ kesma balandligi $f(x)$ ning $\frac{a+b}{2}$ nuqtadagi $f(\frac{a+b}{2})$ qiymatiga teng bo'lgan to'g'ri turtburchak yuzasining kattaligidan

iborat.

Quyidagi kvadratur formulani hosil qilamiz.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad (b)$$

Katta nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lgan kvadratur formulalar bilan bog'liq hisoblash algoritmlarini optimizizastiyalash masalalari bilan ko'pgina olimlar shug'ullanib kelgan[3-4]. Bularndan S.L.Sobolev, A.N.Kolmogorov, S.M.Nikolskiy va boshqalar.

Kvadratur formulani $p(x)$ – vazn funksiyasi bilan qaraydigan bo'lsak

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} f(x^{(\lambda)}), \quad (c)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu holda xatolik funksionali quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\ell(x) = p(x)\varepsilon_{[a,b]}(x) - \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}), \quad (d)$$

Integrallarni taqribiy hisoblash uchun formula qurish hisoblash matematikasi va sonlar nazariyasining bir sinf masalasini tashkil qiladi. Bunday masalalarni yechish bilan juda ko'p taniqli matematiklar shug'ullanishgan, shuning uchun ham juda ko'p formulalar ularning nomlari bilan ataladi, masalan Nyuton, Eyler, Gauss, Chebishev, Markov formulalarini misol keltirish mumkin. Integrallarni taqribiy hisoblashda integral ostidagi funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa unda kvadratur formula deyiladi, bunday masalalar bilan birinchi bo'lib Sard, Nikolskiylar shug'ullangan, agar integral ostidagi funksiya ikki va undan ortiq o'zgaruvchili bo'lsa unda kubatur formula deyiladi, bunday masalalar bilan birinchi bo'lib Sobolev shug'ullangan.

ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BO'LGAN KVADRATUR FORMULALAR. ROMBERG INTEGRALLASH FORMULASI.

Romberg integrallashi trapetsiya qoidasini Richardson ekstrapolyatsiyasi bilan birlashtiradi. Formula quyidagi ko'rinishga ega:

$$R_{i,1} = I_i \quad (1)$$

Bu yerda, avvalgidek, I_i , 2^{i-1} panellari yordamida rekursiv trapetsia qoidasi bo'yicha

hisoblangan $\int_a^b f(x)dx$ ning taqribiy qiymatini ifodalaydi. Bu taqribiy xatolik:

$$E = c_1 h^2 + c_2 h^4 + \dots, \text{ bu yerda}$$

$$h = \frac{b-a}{2^{i-1}} \quad (2)$$

panelning kengligi.

Romberg integrallashi $R_{2,1} = I_2$ (bir panel) va $R_{1,1} = I_1$ (ikki panel) ni trapetsiya qoidasidan hisoblashdan boshlanadi. Yetakchi xato atamasi $c_1 h^2$ Richardson ekstrapolyatsiyasi bilan yo`q qilinadi. Berilgan tenglamada  $p = 2$  (yetakchi xato atamasidagi ko`rsatkich) dan foydalanib va natijani $R_{2,2}$ bilan belgilab, quyidagini hosil qilamiz

$$R_{2,2} = \frac{2^2 R_{2,1} - R_{1,1}}{2^{2-1}} = \frac{4}{3} R_{2,1} - \frac{1}{3} R_{1,1} \quad (3)$$

Natijalarni forma massivida saqlash qulay

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} \quad R_{2,2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Keyingi qadam $R_{3,1} = I_3$ (to`rtta panel) hisoblash $R_{2,1}$ va $R_{3,1}$ bilan Richardson ekstrapolyatsiyasini takrorlash va natijani $R_{3,2}$ sifatida saqlashdir:

$$R_{3,2} = \frac{4}{3} R_{3,1} - \frac{1}{3} R_{2,1} \quad (5)$$

R massivining hozirgacha hisoblangan elementlari

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} \quad R_{2,2} \\ R_{3,1} \quad R_{3,2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ikkinchi ustunning ikkala elementida $C_2 h^4$ ko`rinishidagi xatolik mavjud, uni Richardson ekstrapolyatsiyasi bilan ham bartaraf etish mumkin. Berilgan tenglamada $p = 4$ dan foydalanib, biz quyidagi tenglamani olamiz.

$$R_{3,3} = \frac{2^4 R_{3,2} - R_{2,2}}{2^{4-1}} = \frac{16}{15} R_{3,2} - \frac{1}{15} R_{2,2} \quad (7)$$

Bu natijada $O(h^6)$ xatolik bor. Massiv hozirgacha kengaytirildi

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} & R_{2,2} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Boshqa hisob –kitoblardan so`ng biz olamiz

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} & R_{2,2} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

bu erda $R_{4,4}$ dagi xato $O(h^8)$ dir. Integralning eng aniq bahosi har doim massivning oxirgi diagonali elementi hisoblanadi. Bu jarayon ketma – ket ikkita diagonallar orasidagi farq yetarlicha kichik bo`lguncha davom ettiriladi. Ushbu sxemada ishlatiladigan umumiy ekstrapolyatsiya formulasi

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad i > 1, \quad j = 2, 3, \dots, i \quad (10 a)$$

(10 a) tenglamaning rasmi ko`rinishi quyida tasvirlangan.

$$\begin{array}{c} \boxed{R_{i-1,j-1}} \\ \searrow \\ \alpha \\ \swarrow \\ \boxed{R_{i,j-1}} \rightarrow \beta \rightarrow \boxed{R_{i,j}} \end{array} \quad (10 b)$$

α va β ko`paytirgichlar  $j$  ga quyidagi tarzda bog`liq bo`ladi:

j	2	3	4	5	6
α	-1/3	-1/15	-1/63	-1/255	-1/1023
β	4/3	16/15	64/63	256/255	1024/1023

(10 c)

Uchburchak massiv qo`lda hisoblash uchun qulay, ammo Romberg algoritmini kompyuterda amalga oshirish bir o`lchovli R' massivda amalga oshirilishi mumkin. Birinchi ekstrapolyatsiyadan so`ng (a) tenglamada $R_{1,1}$ boshqa hech qachon ishlatilmaydi, shuning

uchun uni $R_{2,2}$ bilan almashtirish mumkin. Natijada, biz quyidagi massivga ega bo'lamiz.

$$\begin{bmatrix} R_1' = R_{2,2} \\ R_2' = R_{2,1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

(b) va (c) tenglamalar bilan aniqlangan ikkinchi ekstrapolyatsiya bosqichida $R_{3,2}$, $R_{2,1}$ ning o'rniga yoziladi va $R_{3,3}$, $R_{2,2}$ ning o'rnini egallaydi, shunday qilib, massiv (1.49) va boshqalarni o'z ichiga oladi.

$$\begin{bmatrix} R_1' = R_{3,3} \\ R_2' = R_{3,2} \\ R_3' = R_{3,1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Shu tarzda, R_1' har doim eng yaxshi joriy natijani o'z ichiga oladi. K - raund uchun ekstrapolyatsiya formulasi quyidagicha bo'ladi.

$$R_j' = \frac{4^{k-j} R_{j+1}' - R_j'}{4^{k-j} - 1}, \quad j = k-1, k-2, \dots, 1 \quad (13)$$

■ **romberg**

Romberg integrallash algoritmi romberg funksiyasida amalga oshiriladi. U integralni va ishlatilgan panellar sonini qaytaradi. Richardsonning ekstrapolyatsiyasi Richardson subfunksiyasi tomonidan amalga oshiriladi.

romberg moduli

```
''' I, nPanels = romberg ( f,a,b,tol =1.0e -6).
```

f(x) ning x = a dan b gacha bo'lgan Romberg integrallashi.

Integral va ishlatiladigan panellar sonini qaytaradi.

```
'''
```

```
trapezoid importdan numpy ni
```

```
np sifatida import qilish *
```

```
def romberg(f,a,b,tol=1.0e -6):
```

```
def richardson(r,k):
```

```
for j in range(k -1,0, -1):
```

```
const = 4.0**(k -j)
```

```
r[j] = (const*r[j+1] - r[j])/(const - 1.0)
```

```
return r
r = np.zeros(21)
r[1] = trapezoid(f,a,b,0.0,1)
r_old = r[1]
for k in range(2,21):
r[k] = trapezoid(f,a,b,r[k-1],k)
r = richardson(r,k)
if abs(r[1] -r_old) < tol*max(abs(r[1]),1.0):
return r[1],2**(k-1)
r_old = r[1]
print("Romberg kvadraturasi yaqinlashmadi.")
```

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. Behruz Ulug'bek o'g, Q. li.(2023). Mobil ilovalar yaratish va ularni bajarish jarayoni. International journal of scientific researchers, 2(2).
2. Karimov, F. (2022). ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASH. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu. uz), 14(14).
3. Quvvatov, B. (2024). GLOBAL IN VIRTUAL LEARNING MOBILE APP CREATION INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGIES. Science and innovation in the education system, 3(1), 95-104.
4. Quvvatov, B. (2024). SQL DATABASES AND BIG DATA ANALYTICS: NAVIGATING THE DATA MANAGEMENT LANDSCAPE. Development of pedagogical technologies in modern sciences, 3(1), 117-124.
5. Quvvatov, B. (2024). CONSTRUCTION OF SPECIAL MODELS THROUGH DIFFERENTIAL EQUATIONS AND PRACTICAL SOLUTIONS. Solution of social problems in management and economy, 3(1), 108-115.
6. Quvvatov, B. (2024). FINDING SOLUTIONS OF SPECIAL MODELS BY INTEGRATING INTEGRAL EQUATIONS AND MODELS. Current approaches and new research in modern sciences, 3(1), 122-130.
7. Quvvatov, B. (2024). WEB FRONT-END AND BACK-END TECHNOLOGIES IN PROGRAMMING. Theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences, 3(1), 208-215.
8. Behruz Ulug'bek o'g, Q. (2023). USE OF ARTIFICIAL NERVOUS SYSTEMS IN MODELING. Multidisciplinary Journal of Science and Technology, 3(5), 269-273.
9. Behruz Ulugbek og, Q. (2023). TECHNOLOGY AND MEDICINE: A DYNAMIC PARTNERSHIP. International Multidisciplinary Journal for Research & Development, 10(11).
10. Quvvatov, B. (2024). DIFFERENTIAL TENGLAMALAR VA AMALIY ECHIMLAR ORQALI MAXSUS MODELLARNI QURISH. Menejment va iqtisodiyotda ijtimoiy muammolarni hal qilish , 3 (1), 108-115.
11. Behruz Ulug'bek o'g', Q. (2023). SUN'IY NERV TIZIMLARIDAN MODELLASHDA FOYDALANISH. Fan va texnologiyaning ko'p tarmoqli jurnali , 3 (5), 269-273.
12. Behruz Ulug'bek og', Q. (2023). TEXNOLOGIYA VA TIBBIYOT: DINAMIK HAMKORLIK. Tadqiqot va ishlanmalar bo'yicha xalqaro multidisipliner jurnali , 10 (11).