SONLI USULLAR MASHG'ULOTLARIDA ALGEBRAIK TENGLAMALARNI YECHISHNI ODDIY ITERATSIYA METODINI QO'LLASH.

Farmonov Sherzodbek Raxmonjonovich
Farg'ona davlat unversiteti amaliy matematika va informatika kafedrasi katta oʻqituvchisi
farmonovsh@gmail.com
Ne'matova Nozimaxon Rustambek qizi
Farg'ona davlat unversiteti 4-kurs talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.10532885

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 10-January 2024 yil
Ma'qullandi: 15- January 2024 yil
Nashr qilindi: 19- January 2024 yil

KEY WORDS

Lagranj teoremasi, iteratsiya metodi, uzluksiz funksiya, ketma-ket yaqinlashish.

ABSTRACT

Ushbu maqolada oddiy iteratsiya metodiga oid ba'zi misollar ko'rilgan.

Mamlakatimiz ta'lim tizimida so'nggi yillarda amalga oshirilayotgan keng qamrovli islohotlarning zamirida oliy ta'lim tizimini mazmunan yangilash, axborotlar globallashgan bir davrda mazkur ta'lim tizimida pedagogik faoliyat yuritayotgan professor-o'qituvchilarning ta'lim-tarbiya jarayonini tashkil etishni modernizatsiyalash, mazkur jarayonga innovatsion texnologiyalarni tadbiq etish, bu borada xorij tajribalaridan samarali foydalanish kabi muhim vazifalarni qamrab olgan. Mazkur vazifalarni amalga oshirishda bugungi kun pedagogi zimmasiga ta'lim-tarbiya mazmuniga bog'liq innovatsion ta'lim texnologiyalarini tanlash, mashg'ulotlar ishlanmalari va texnlogik xaritalarni loyihalash, ularda belgilangan o'quv maqsadlarini amalda qo'llay olish, talabalarning yosh, psixologik xususiyatlariga asosan talaba shaxsiga yo'naltirilgan ta'limni tashkil eta olish dolzarb masalalardan biri hisoblanadi. Algebraik tenglamalarni ildizlarini topish ba'zan talabalar uchun biroz murakkablik qiladi. Bu borada talabalarning nazariy bilimlarini amaliyotda qo'llashda "Oddiy iteratsiya metodi" ni ahamiyatini va rolini alohida ta'kidlagan bo'lardik. Ushbu metod orqali maxsus yechish usuliga ega bo'lmagan algebraik tenglamalar ildizini taqribiy hisoblash mumkin.

Agar $f(x)$ funksiya koʻphaddan iborat boʻlsa, ya'ni

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

boʻlsa,

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

koʻrinishdagi tenglama algebraik tenglama deyiladi.

Algebraik tenglamani yechish uchun biz avval uning ildizlari yotgan oraliqni topish kerak.

Lagranj teoremasi. Agar (1) tenglamaning manfiy koeffitsientlaridan eng kattasi a_k

bo‘lib, B manfiy koeffisientlarning absolyut qiymatlari bo‘yicha eng kattasi bo‘lsa, u holda musbat ildizlarning yuqori chegarasi

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \qquad (1)$$

son bilan ifodalanadi.

Biz hozir oddiy iteratsiya (yoki ketma-ket yaqinlashish) metodi bilan bitta sonli tenglama misolida tanishamiz. Iteratsiya metodini qo‘llash uchun $f(x) = 0$ tenglama unga teng kuchli bo‘lgan quyidagi

$$x = \varphi(x) \qquad (2)$$

kanonik shaklga keltirilgan va ildizlari ajratilgan bo‘lishi kerak. (2) tenglamaning ildizi yotgan atrofning biror x_0 nuqtasini izlanayotgan ildizining nolinchi yaqinlashishi deb olamiz. Navbatdagi yaqinlashishini topish uchun (2) ning o‘ng tomoniga x_0 ni qo‘yamiz va hosil bo‘lgan $\varphi(x_0)$ qiymatini x_1 bilan belgilaymiz, ya’ni

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (3)$$

Topilgan x_1 sonni (2) ning o‘ng tomoniga qo‘yib, yangi son $x_2 = \varphi(x_1)$ ni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, n- yaqinlashish x_n ni $(n-1)$- yaqinlashish x_{n-1} yordamida topamiz:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4)$$

Bu formula yordamida topilgan sonlar ketma-ketligining limiti, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \xi \qquad (5)$$

mavjud va $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, (4) tenglikning har ikkala tomonida limitga o‘tib,

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \varphi(\xi),$$

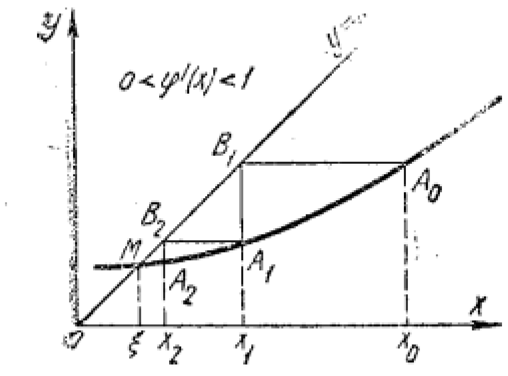
ya’ni

$$\xi = \varphi(\xi)$$

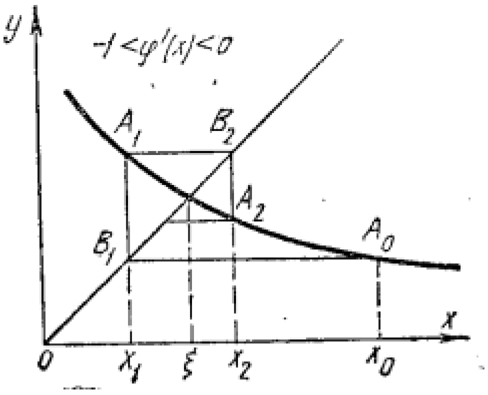
ga ega bo‘lamiz. Bu tenglikdan ko‘rinadiki, ξ berilgan tenglamaning ildizi ekan. Demak, bu ildizni (4) formula yordamida istalgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. (5) limit mavjud bo‘lgan holda iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi deyiladi. Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ mavjud bo‘lmasligi ham mumkin, bunday holda oddiy iteratsiya usuli maqsadga muvofiq bo‘lmaydi.

Iteratsiya metodi sodda geometrik ma’noga ega. Buni tushunish uchun $y = \varphi(x)$ va $y = x$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklarning kesishgan M nuqtasining abssissasi (2) tenglamaning $x = \xi$ ildizidir.

Faraz qilaylik, x_0 nolinchi yaqinlashish bo‘lsin, u vaqtda $A_0\left(x_0,\varphi\left(x_0\right)\right)$ nuqta $y=\varphi\left(x\right)$ egri chiziqda yotadi (3-chizma) Bu nuqtadan gorizontal (Ox o‘qiga parallel) chiziq o‘tkazamiz. Bu chiziq $y=x$ bissektrisani $B_1\left(\varphi\left(x_0\right),\varphi\left(x_0\right)\right)$ nuqtada kesadi. $\varphi\left(x_0\right)$ ni x_1 bilan belgilab olsak, B_1 nuqtaning koordinatalari $\left(x_1,x_1\right)$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. B_1 nuqta orqali Oy o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazsak, u $y=\varphi\left(x\right)$ egri chiziqni $A_1\left(x_1,\varphi\left(x_1\right)\right)$ nuqtada kesadi. Bu jarayonni davom ettirib, $y=x$ bissektrisada yotgan $B_2\left(x_2,x_2\right)$ (bu yerda $x_2=\varphi\left(x_1\right)$), so‘ng $y=\varphi\left(x\right)$ egri chiziq ustida $A_2\left(x_2,\varphi\left(x_2\right)\right)$ nuqtaga ega bo‘lamiz va h. k. Agar iteratsiya jarayoni yaqinlashsa, u vaqtda $A_0,A_1,\ldots,A_n,\ldots$ nuqtalar izlanayotgan M nuqtaga yaqinlashadi. $A_0,A_1,A_2,\ldots$ nuqtalarning $x_0,x_1,x_2,\ldots$ abssissalari ξ ga, ya’ni (2) tenglamaning ildiziga yaqinlashadi. Shunday qilib, iteratsiya metodining geometrik ma’nosi quyidagidan iborat: $y=\varphi\left(x\right)$ egri chiziq bilan koordinatalar burchagi bissektrisasining kesishish nuqtasiga siniq chiziq bo‘ylab harakat qilamiz, siniq chiziqning uchlari navbat bilan egri chiziq va bissektrisa ustida yotadi, tomonlari esa navbat bilan gorizontal va vertikal yo‘nalgan bo‘ladi. Agar egri chiziq va bissektrisa 1-chizmadagidek joylashgan bo‘lsa, u vaqtda siniq chiziq zinapoyani eslatadi. Agar egri chiziq va bissektrisa 2-chizmadagidek bo‘lsa, unda siniq chiziq spiralni eslatadi.

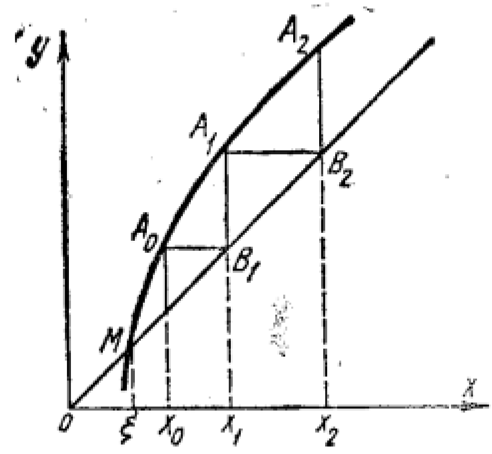


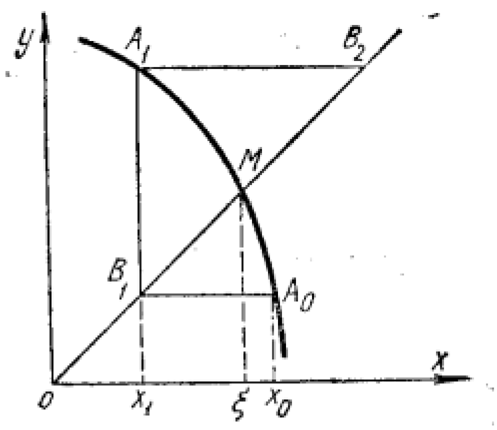
1-chizma.



2-chizma.

Iteratsion jarayon uzoqlashishi ham mumkin. Buning geometrik ma’nosi shundan iboratki, zinapoyaning pog‘onalari (yoki spiralning bo‘g‘inlari) borgan sari kattalashadi, shuning uchun ham $A_0,A_1,A_2,\ldots$ nuqtalar M ga yaqinlashmaydi, balki uzoqlashadi (3-4-chizmalar).





3-chizma. 4-chizma.

Modomiki, iteratsiya jarayoni har doim yaqinlashavermas ekan, demak, bu jarayon yaqinlashishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerakligini aniqlash katta ahamiyatga ega. Bu shartlar ushbu teoremada koʻrsatiladi.

Teorema. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(x)$ funksiya

$$|x - x_0| \le \delta \tag{6}$$

oraliqda aniqlangan boʻlib, bu oraliqdan olingan ixtiyoriy ikkita x va y nuqtalar uchun $\varphi(x)$ Lipshits shartini qanoatlantirsin:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x - y| \quad (0 < q < 1) \tag{7}$$

2) quyidagi tengsizliklar bajarilsin:

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \le \eta, \ \frac{\eta}{1-q} \le \delta \tag{8}$$

U holda (2) tenglama (6) oraliqda yagona ξ ildizga ega boʻlib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik bu yechimga intiladi va intilish tezligi

$$|x_n - \xi| \le \frac{\eta}{1-q} q^n \tag{9}$$

tengsizlik bilan aniqlanadi.

Misol. $f(x) = x^3 - 20x + 12 = 0$ tenglama ildizlarini ajrating va ajratilgan ildizlami iteratsiya metodi bilan aniqlaydigan jarayonni koʻrsating.

Yechish. Ildizlar chegarasini Lagranj teoremasiga koʻra aniqlaymiz: $a_0 = 1$, $k = 2$, $a_2 = -20$, $R^+ < 1 + \sqrt{\frac{20}{1}} < 5{,}5$, tenglamada $x = -x$ almashtirish oʻtkazib, hosil boʻlgan tenglamaga Lagranj teoremasini qo'llasak, $a_0 = 1$, $k = 2$, $B = 20$, $R^+ < 1 + \sqrt{\frac{20}{1}} < 5,5$, bo'ladi. Demak, berilgan tenglamaning haqiqiy ildizlari $(-5,5;5,5)$ oraliqda yotadi. Quyidagini aniqlaymiz:

x	$-5,5$	-5	-4	0	1	4	5	$5,5$
$\text{sign}\, f(x)$	–	–	+	+	–	–	+	+

Ya'ni berilgan tenglama 3 ta haqiqiy ildizga ega bo'lib, ular $(-5;-4)$, $(0;1)$ va $(4;5)$ oraliqlarda joylashgan.

Iteratsiya metodi. A) $(-5;-4)$ oraliqdagi ildiz uchun berilgan tenglamani $x = \sqrt[3]{20x-12} = \varphi(x)$ ko'rinishga keltiramiz, chunki

$$\max_{[-5;-4]} |\varphi'(x)| = \max_{[-5;-4]} \left| \frac{20}{3\sqrt[3]{(20x-12)^2}} \right| < \frac{20}{3\sqrt[3]{92^2}} < \frac{20}{3 \cdot 4,5^2} = \frac{80}{243} < \frac{1}{3}$$

bo'ladi. Hisoblash jarayoni

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{20x_n - 12}, \quad n = 0,1,...$$

formula bilan tashkil etiladi, bu yerda x_0 ixtiyoriy bo'lib, $[-5,-4]$ oraliqqa tegishli.

$x_0 = -4$;

$x_1 = \sqrt[3]{20 \cdot (-4) - 12} \approx -4,5144$;

$x_2 = \sqrt[3]{20 \cdot (-4,5144) - 12} \approx -4,6767$;

$x_3 = \sqrt[3]{20 \cdot (-4,6767) - 12} \approx -4,7257$;

$x_4 = \sqrt[3]{20 \cdot (-4,7257) - 12} \approx -4,7403$;

$x_5 = \sqrt[3]{20 \cdot (-4,7403) - 12} \approx -4,7446$;

$x_6 = \sqrt[3]{20 \cdot (-4,7446) - 12} \approx -4,7459$;

$x_7 = \sqrt[3]{20 \cdot (-4,7459) - 12} \approx -4,7462$;

$|x_7 - x_6| \le 0,001$

Demak, tenglamaning $[-5,-4]$ oraliqdagi taqribiy ildizi:

$x \approx -4,7462$.

B) $(0;1)$ oraliqdagi ildiz uchun

$$x = \frac{x^3 + 12}{20} = \varphi(x)$$

deb olamiz, chunki

$$\max_{[0,1]}|\varphi'(x)| = \max_{[0,1]}\left|\frac{3x^2}{20}\right| \le \frac{3}{20} < 1$$

bo'ladi. Hisoblash jarayoni

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 12}{20}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

formula bilan tashkil etiladi va x_0 sifatida $[0,1]$ ga tegishli ixtiyoriy qiymatni olish mumkin.

$x_0 = 0$;

$$x_1 = \frac{0^3 + 12}{20} \approx 0,6;$$

$$x_2 = \frac{0,6^3 + 12}{20} \approx 0,6108;$$

$$x_3 = \frac{0,6108^3 + 12}{20} \approx 0,6114;$$

$|x_3 - x_2| \le 0,001$

Demak, tenglamaning $[0,1]$ oraliqdagi taqribiy ildizi:

$x \approx 0,6114$.

D) $(4;5)$ oraliqdagi ildiz uchun ham hisoblash jarayoni

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{20x_n - 12}, \quad n = 0,1,\ldots$$

formula bilan amalga oshiriladi, x_0 ixtiyoriy bo'lib, $[4,5]$ oraliqqa tegishli.

$x_0 = 4$;

$x_1 = \sqrt[3]{20\cdot 4 - 12} \approx 4,0817$;

$x_2 = \sqrt[3]{20\cdot 4,0817 - 12} \approx 4,1141$;

$x_3 = \sqrt[3]{20\cdot 4,1141 - 12} \approx 4,1268$;

$x_4 = \sqrt[3]{20\cdot 4,1268 - 12} \approx 4,1318$;

$x_5 = \sqrt[3]{20\cdot 4,1318 - 12} \approx 4,1337$;

$x_6 = \sqrt[3]{20\cdot 4,1337 - 12} \approx 4,1345$;

$x_7 = \sqrt[3]{20\cdot 4,1345 - 12} \approx 4,1348$;

$|x_7 - x_6| \le 0,001$

Demak, tenglamaning $[4,5]$ oraliqdagi taqribiy ildizi:

$x \approx 4,1348$.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. Israilov M.I. Hisoblash usullari. 1-qism. – Toshkent: O'qituvchi, 2003.

2. Abduxamidov A.U., Xudoynazarov S. Hisoblash usullaridan amaliyot va laboratoriya mashgʻulotlari. – Toshkent: Oʻqituvchi, 1995.
3. Бахвалов Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1975.
4. Воробьева Г.К., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М: Высшая школа, 1990.
5. Raxmonjonovich, F. S. (2023). USE OF BLENDED LEARNING TECHNOLOGY IN ORGANIZING INDEPENDENT EDUCATION OF STUDENTS. MATERIALLAR TOʻPLAMI, 352.
6. Farmonov, S., & Karimova, M. (2023). MODERN METHODS TO DEVELOP MATHEMATICAL THINKING IN SCHOOLCHILDREN. Бюллетень педагогов нового Узбекистана, 1(6 Part 2), 28-38.
7. Tojiyev, T., Boynazarov, A., & Farmonov, S. (2022). PHARMACOKINETICS IS A DESCRIPTION OF DRUGS AND THEIR BEHAVIOR IN THE HUMAN BODY BY BUILDING A MATHEMATICAL MODEL. Евразийский журнал медицинских и естественных наук, 2(13), 146-149.
8. Фармонов, Ш., & Хайдарова, С. (2022). Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-дифференциальным оператором. Norwegian Journal of Development of the International Science, (99), 10-15.