ЗАДАЧИ ТИПА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦЕНТОМ

Ахметов Куанишбек Низамаддинович
преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент
Тожинорова Махлиё Муроджон кизи
преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент
Хамрокулова Шахноза Шермат кизи
преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент
https://doi.org/10.5281/zenodo.8080716

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 20-June 2023 yil
Ma'qullandi: 23-June 2023 yil
Nashr qilindi: 26-June 2023 yil

KEY WORDS

Имеется целый ряд работ отечественных и зарубежных ученых, в которых исследуются основные смешанные краевые задачи(Трикоми, Геллерстедта) для уравнений эллиптико – гиперболического и параболо – гиперболического типов первого рода, т.е. для таких уравнений, линия вырождения которых не является характеристикой.

ABSTRACT

Вырождающиеся уравнения занимают центральное место в теории дифференциальных уравнений в частных производных и имеют многочисленные приложения в различных разделах науки. Уравнения с вырождениями смешанного типа стали изучаться систематически с конца 40-х годов прошлого века, после того как Ф.И.Франкль [43] указал их приложения к проблемам околозвуковой и сверхзвуковой газовой динамики. Позже были найдены применения этих уравнений и в других сферах науки и техники.

Актуальность работы. Уравнение смешанного типа благодаря приложениям при решении многих важных вопросов прикладного характера как, теория газовая динамика, магнитная гидродинамика, теория электронного рассеивания, теория бесконечно малых изгибаний поверхностей и прогнозирования уровня грунтовых вод, является одним из основных направлений теории дифференциальных уравнений в частных производных, интенсивно развиваются с пятидесятых годов прошлого века.

Целью исследования является изучение вопросов, однозначной разрешимость задачи Трикоми эллиптико – гиперболического уравнения второго рода с сингулярным коэффицентом.

Объектом исследования являются вырождающиеся уравнения гиперболического, эллиптического и эллиптико – гиперболического типов второго рода с сингулярным коэффицентом.

Предметом исследования являются краевые задачи для вырождающегося эллиптического и гиперболического уравнения, а также краевые задачи для эллиптико – гиперболического уравнения второго рода с сингулярным коэффицентом.

Методы исследований. При доказательстве однозначной разрешимости поставленных краевых задач применяются теория специальных функции, теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода, сингулярные интегральные уравнение нормального типа и теории принципа экстремума, а также методы решения уравнений с частными производными.

Постановка задачи T

Рассмотрим уравнение

$$(signy)\,|\,y\,|^m\,u_{xx}+u_{yy}+(\beta_0\,/\,y)u_y=0 \qquad (2.1)$$

в области $D=D_1\cup D_2\cup J$, где D_1 - область, ограниченная нормальной кривой $\sigma_0:\left(x-1/2\right)^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1/4$ при $y>0$ с концами в точках $A(0,0),\ B(1,0)$ и отрезком $AB(y=0)$, а D_2 - область, ограниченная отрезком AB и характеристиками

$$AC:x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\quad BC:x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения (2.1), $J=\left\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\right\}$, где постоянные m и β_0 удовлетворяют условия (1.33).

Введем обозначения $D=D_1\cup D_2\cup J,\ \partial D=\vec{\sigma}\cup\overrightarrow{AC}\cup\overrightarrow{BC},\quad 2\beta=\dfrac{m+2\beta_0}{m+2}$,

причем удовлетворяет условию (1.36).

В области D для уравнения (2.1) исследуем задачи Трикоми.

Задача T**.** Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)\cup C^1\left(D_1\cup D_2\cup J\right)$, причем производные u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем единицы в точках $A\left(0,0\right)$ и $B\left(1,0\right)$;

2) $u(x,y)\in C^2\left(D_1\right)$– является регульярным решением уравнения (2.1) в области D_1, а в области D_2 – обобщенным решением из класса R_2 [34, с.229] ;

3) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}=-\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y}; \qquad (2.2)$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_0}=\varphi(x),\qquad x\in\bar{J}, \qquad (2.3)$$

$$u(x,y)\big|_{AC} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \qquad (2.4)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные функции, причем $\varphi(0) = \psi(0) = 0$,

$$\varphi(x) = x(1-x)\varphi(x),\ \tilde{\varphi}(x) \in C[0,1], \qquad (2.5)$$

$$\psi(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right]. \qquad (2.6)$$

Вывод основных функциональных соотношений

При исследовании задачи T важную роль играет функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^{\pm}(x)$, принесенное на отрезке J из параболического и гиперболического части смешанной области D, где

$$\lim_{y \to \pm 0} u(x,y) = \tau(x),\ (x,0) \in \bar{J}, \qquad \lim_{y \to \pm 0} (\pm y)^{\beta_0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu^{\pm}(x),\ (x,0) \in J. \qquad (2.7)$$

Обобщенное решение задачи Коши с начальными данными

$$\lim_{y \to -0} u(x,y) = \tau(x), \qquad (x,0) \in \bar{J},$$

$$\lim_{y \to -0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu^{-}(x),\ x \in J, \quad (x,0) \in J \qquad (2.8)$$

для уравнения (2.1) из класса R_2 [34, c.229] в области D_2 даётся формулой:

$$u(\xi,\eta) = \int_0^{\xi} (\eta - t)^{-\beta} (\xi - t)^{-\beta} T(t)\,dt + \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^{-\beta} (t - \xi)^{-\beta} N(t)\,dt. \qquad (2.9)$$

где

$$N(t) = \frac{1}{2\cos\pi\beta} T(t) - \gamma_1 \nu^{-}(t), \quad \gamma_1 = \left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta-1} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}, \qquad (2.10)$$

$$\xi = x - (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}}, \qquad \eta = x + (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}}, \qquad (2.11)$$

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta} T(t)\,dt == \Gamma(1-2\beta) D_{0x}^{-(1-2\beta)} T(x), \qquad (2.12)$$

функции $T(x)$ и $\nu(x)$ непрерывны в интервале J и интегрируемы на $\bar{J}$, кроме того $\tau(x)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β при $x \to 0$.

Положив $\xi = 0$ и $\eta = x$ в (2.9) с учётом (2.4), (2.11) получим

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x (x-t)^{-\beta} t^{-\beta} N(t)\,dt. \qquad (2.13)$$

Отсюда в силу (1.9), имеем

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \Gamma(1-\beta) D_{0x}^{\beta-1} x^{-\beta} N(x). \qquad (2.14)$$

Применяя оператор $D_{0x}^{1-\beta}$ к обеим частям равенства (2.14), с учетом (1.10) получим

$$N(x)=\frac{x^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (2.15)$$

В силу (2.10) из (2.15) имеем

$$T(x)=2\gamma_1\cos\pi\beta\nu^{-}(x)+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}x^{\beta}D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (2.16)$$

Применяя оператор $D_{0x}^{1-2\beta}$ к обеим частям равенства (2.12), с учетом (1.10) имеем

$$T(x)=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x). \qquad (2.17)$$

Отсюда и из (2.16) получим первое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^{-}(x)$, принесенное из области D_2 на J:

$$\nu^{-}(x)=\frac{1}{2\gamma_1\cos\pi\beta\cdot\Gamma(1-2\beta)}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)-$$

$$-\frac{1}{\gamma_1\Gamma(1-\beta)}x^{\beta}D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad (x,0)\in J. \qquad (2.18)$$

Решение задачи N с условиями (2.3) и (1.62) для уравнения (2.1) в области D_1 существует, единственно и представимо в виде (1.64)(см. гл.1, § 1.5).

Переходя в (1.64) к пределу при $y\to+0$ с учетом (2.7), получим

$$\tau(x)=-k_1\int_0^1\nu^{+}(t)\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right]dt-$$

$$-\frac{k_1(m+2\beta_0)}{2}x(1-x)\int_0^l\varphi(\xi(s))\eta^{\beta_0-1}(s)\left[(\xi(s)-x)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}(s)\right]^{-\beta-1}\frac{d\xi(s)}{ds}ds. \qquad (2.19)$$

Принимая во внимание уравнение нормальной кривой σ_0

$$y=(1-2\beta)^{2\beta-1}\left[x(1-x)\right]^{\frac{1}{2}-\beta}$$

и полагая $\varphi(\xi(s))=\varphi_1(x)$, получим второе функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^{+}(x)$, принесенное из области D_1 на J:

$$\tau(x)=-k_1\int_0^1\nu^{+}(t)\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right]dt+\Phi_1(x),\ (x,0)\in\bar{J}, \qquad (2.20)$$

где

$$\Phi_1(x)=-\frac{k_1(m+2\beta_0)}{2}\left(\frac{m+2}{2}\right)^{2\beta-1}x(1-x)\int_0^1\varphi_1(t)\frac{\left[t(1-t)\right]^{\beta-\frac{1}{2}}}{\left[x^2+(1-2x)t\right]^{\beta+1}}dt. \qquad (2.21)$$

Единственность решения задачи T

Для доказательства единственность решения задачи T важную роль играют следующие леммы.

Лемма 2.1. Если функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателём $k>-2\beta$ при $0<x<1$, то функцию (2.17) можно представить в виде

$$T(x)=\frac{sin2\pi\beta}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{2\beta}\tau'(t)dt. \qquad (2.22)$$

Лемма 2.2. Если функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателём $k>-2\beta$ при $0<x<1$ (т.е. $\tau(x)\in C^{(1,k)}(0,1)$), то функцию (2.23) можно представить в виде

$$T(x)=\frac{sin2\pi\beta}{2\pi\beta}\left[\tau'(x)x^{2\beta}+2\beta\int_0^x\left[\tau'(t)-\tau'(x)\right](x-t)^{2\beta-1}dt\right]. \qquad (2.24)$$

Лемма 2.3[20],[34]. Пусть выполнены условия (1.33),(1.36),

$$\tau(x)\in C[0,1]\cap C^{(1,k)}(0,1),\ k>-2\beta \qquad (2.27)$$

и функция $\tau(x)$ в точке $x=x_0$ $\left(x_0\in(0,1)\right)$ принимает наибольшее положительное значение(НПЗ) и наименьшее отрицательное значение(НОЗ). Тогда функцию $T(x)$ (см.(2.17)) в точке $x=x_0$ можно представить в виде

$$T(x_0)\equiv\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)\Big|_{x=x_0}=$$

$$=\frac{sin2\beta\pi}{\pi}\left[{x_0}^{2\beta-1}\tau(x_0)+(1-2\beta)\int_0^{x_0}\frac{\tau(x_0)-\tau(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}}d\,t\right], \qquad (2.28)$$

причём

$$T(x_0)<0\quad\left(T(x_0)>0\right),\quad x_0\in J. \qquad (2.29)$$

Из леммы 2.1-2.3 следует следующее

Теорема 2.1.(**Аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе**). Если выполнены условия (1.33) и (1.36) , то решение $u(x,y)$ задачи T при $\psi(x)\equiv 0$ своего НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигает лишь на $\bar{\sigma}_0$.

Теорема 2.2. Если выполнены условия (1.33) и (1.36), то в области D решение задачи T иметь не более одного решения.

Существование решения задачи T

Теорема 2.3. Если выполнены условия (1.33),(1.36), (2.5),(2.6) и

$$\varphi(0)=\psi(0)=0, \qquad (2.35)$$

то в области D решение задачи T существует.

Доказательство теоремы 2.3. Исключив $\tau(x)$ из соотношений (2.18), (2.20) с учётом (2.2) и

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) = -\frac{k_1 \sin 2\pi\beta}{\pi}\left\{\int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta} \frac{\nu^+(t)dt}{t-x} - \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{-2\beta} \frac{(1-2t)\nu^+(t)dt}{x+t-2xt}\right\} -$$

$$-k_1(1-\cos 2\pi\beta)\nu^+(x) + \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{-2\beta}\Phi_1'(x) \qquad (2.36)$$

имеем

$$\nu^+(x) = -\lambda\left\{\int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta}\left[\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{x+t-2tx}\right]\nu^+(t)dt - \int_0^1 M(x,t)\nu^+(t)dt\right\} +$$

$$+\Phi_2(x), \quad 0 < x < 1, \qquad (2.37)$$

где $\lambda = \dfrac{\cos\pi\beta}{\pi(1+\sin\pi\beta)}$,

$$M(x,t) = \left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta} \frac{(1-2t)(1+t^{-2\beta})}{x+t-2xt}, \qquad (2.38)$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2k_1[1+\sin\pi\beta]\sin\pi\beta}\left[\Phi_3(x) + \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)\gamma_1\cos\pi\beta} D_{0x}^{-2\beta}\Phi_2'(x)\right], \qquad (2.39)$$

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{\gamma_1\Gamma(1-\beta)} x^\beta D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad (2.40)$$

здесь функция $M(x,t)$ непрерывна, исключая точки (1,1), а $\Phi_2(x) \in C^2(0,1)$, и она обращается в бесконечность порядка меньше -2β
и единицы при $x \to 0$ и $x \to 1$ соответственно.

Полагая $\tilde{\nu}^+(x) = x^{-2\beta}\nu^+(x)$, $\tilde{\Phi}_2(x) = x^{-2\beta}\Phi_2(x)$, $\tilde{M}(x,t) = x^{-2\beta}t^{2\beta}M(x,t)$, приведем уравнение (2.37) к виду

$$\tilde{\nu}^+(x) + \lambda\int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta}\left[\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{x+t-2tx}\right]\nu^+(t)dt - \int_0^1 \tilde{M}(x,t)\tilde{\nu}^+(t)dt =$$

$$+\tilde{\Phi}_2(x), \quad 0 < x < 1. \qquad (2.41)$$

Так как $1+\lambda^2 \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}$, то уравнение (2.41) является нормального типа.

Учитывая $\Phi_2(x) \in C^2(0,1)$ нетрудно убедиться, что функция $\tilde{\Phi}_2(x) \in C[0,1) \cap C^2(0,1)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $x \to 1$, а при $x \to 0$ ограничена.

Таким образом, решение $\tilde{\nu}^+(x)$ уравнения (2.41) ищем в класса функций, неограниченных при $x \to 1$ и ограничены при $x \to 0$, т.е. в классе $h(0)$ [1.25].

К уравнению (2.41) применим метод регуляризации Карлемана-Векуа [22] развитой С.Г. Михлиным [21] и М.М. Смирновым [35] и получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи T.

После определения функций $\nu^{\pm}(x)$ и $\tau(x)$ из (2.41) и (2.19) соответственно, решение задачи T можно восстановить в области D_1 как

решение задачи N (см.(1.64)), а в D_2 как обобщенное решение задачи Коши (см.(2.9)).

Теорема 2.3 доказана.;

Список использованной литературы:

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limitespour equation // Arkiv for matematik, astronomiochfysik. 1935. 25A. № 10. P. 1-12.
2. Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind. // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol.41. no. 9. 2020. Pp. 1886–1897 .
3. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.2. 296 с.
4. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.1. 296 с.
5. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики: Сб. науч. тр. Ленинград, 1970. С. 112-119.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: «Наука». 1966. 204 с.
7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.
8. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 165 с.