



КАСР ТАРТИБЛИ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ОПТИМАЛ ХИСОБЛАШ АЛГОРИТМИНИ ЎРГАНИШНИНГ НАЗАРИЙ АСОСЛАРИ

Зоҳиджон Обиджонович Нурматов

Денов тадбиркорлик ва педагогика институти ўқитувчиси
nurmatovzohidjon35@gmail.com

Аллабердиев Ориф Баҳодир ўғли

Термиз давлат университети магистранти
allaberdiyevorifjon@gmail.com
<https://doi.org/10.5281/zenodo.7950186>

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 12-May 2023 yil
Ma'qullandi: 16-May 2023 yil
Nashr qilindi: 19-May 2023 yil

KEY WORDS

сингуляр интеграл
тенгламалари, моделлаштириш,
Квадратур формула, механик
энергия, Абел интеграл
тенгламаси

ABSTRACT

Ушбу мақолада амалий фанларнинг кўплаб масалалари кесмада ёки кесмалар системасида бир ўлчовли сингуляр интеграл тенгламаларни ечишга келтирилади. Квадратур формулалар ёрдамида ифодаланган сингуляр интеграл тенгламаларнинг тақрибий аналитик ечимлари сонли алгебра, сонли интеграллаш назарияси, интерполяция, аппроксимация ва бошқа шу каби масалаларнинг тадқиқот объекти ҳисобланади. Абел интеграл тенгламаси Вольтерра биринчи тур чизиқли интеграл тенгламасининг хусусий ҳоли ҳисобланади.

Жаҳон миқёсида аэродинамика, эластиклик назарияси ва бошқа амалий фанларнинг кўплаб масалалари кесмада ёки кесмалар системасида бир ўлчовли сингуляр интеграл тенгламаларни ечишга келтирилади. Квадратур формулалар ёрдамида ифодаланган сингуляр интеграл тенгламаларнинг тақрибий аналитик ечимлари сонли алгебра, сонли интеграллаш назарияси, интерполяция, аппроксимация ва бошқа шу каби масалаларнинг тадқиқот объекти ҳисобланади. Сингуляр интеграл тенгламалар математика, физика ва механиканинг турли соҳаларида кенг қўлланилади. Шунинг учун Соболев фазосидаги функциялар учун сингуляр интеграл тенгламаларни тақрибий ечишда оптимал квадратур, кубатур ва интерполяцион формулаларни қуриш, ҳамда уларнинг яқинлашиш тартибини яхшилаш ҳисоблаш математикасининг долзарб вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги вақтда жаҳонда етарлича силлиқ функцияларлар учун Соболев фазоларида оптимал, асимптотик оптимал ва тартиб бўйича оптимал квадратур ва кубатур формулалар қуриш муҳим аҳамият касб этмоқда. Хусусан, кучсиз сингуляр интеграл тенгламаларни сонли-аналитик ечишда оптимал формулалар қуриш, уларнинг Соболев фазоларида хатоликларини баҳолаш кенг татбиқ этилмоқда. Маълумки, Соболев фазосидаги функциялар учун Абел типидagi кучсиз сингуляр тенгламаларни сонли-аналитик ечишда алгебраик аниқлик даражаси юқори бўлган формулаларни қўллаш яхши натижага олиб келади. Шу сабабли Соболев фазосида умумлашган Абел интеграл

тенгламаларни тақрибий ечиш учун ҳосилали, сингуляр вазнли оптимал квадратур формулаларни куриш мақсадли илмий тадқиқотлардан бири ҳисобланади.

Ҳозирда каср тартибли интеграллар ва ҳосилаларнинг, яъни, Абел умумлашган интеграл тенгламасининг амалий аҳамияти муҳимлигини таъкидлаш лозим. Ўз вақтида Абелнинг машҳур таутохрон [1] масаласидан сўнг, ушбу масаланинг ечими Лиувилл [2] томонидан биринчи бўлиб геометрия, физика ва механика масалаларига тадбиқ қилинган. Улар орасида магнитга чексиз тўғри чизиқли ўтказгичнинг таъсири бўйича Лаплас масаласи, иккита бундай ўтказгичнинг ўзаро таъсири бўйича Ампер масаласи, жисмлар тортишиши билан боғлиқ масалалар, шарда иссиқлик тарқалиш масаласи, тақрибий квадратуралар бўйича Гаусс масаласи ва бошқалар мавжуд. Охириги йилларда каср тартибли интеграл тенгламалар, интегро-дифференциал тенгламалар ва дифференциал тенгламалар табиий жараёнларни ифодоловчи математик модел сифатида қаралмоқда. Турли фазоларда бундай тенгламаларнинг ечимлари мавжуд ва ягоналиги чуқур ўрганилмоқда. Шу билан бирга, кўп ҳолларда бу тенгламаларнинг аналитик ечимларини топиш мураккабдир. Шунинг учун каср тартибли интеграл, интегро-дифференциал ва дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг янги самарали усулларини ишлаб чиқиш муҳимдир.

Сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг баъзи маълум натижалари

Умумлашган Абел интеграл тенгламаси Вольтерра биринчи тур чизиқли интеграл тенгламасининг хусусий ҳоли ҳисобланади. Умумлашган Абел тенгламаси физика, механика ва бошқа фанларнинг қандайдир конкрет масалаларига бевосита олиб келадиган интеграл тенгламалардан биридир. Бугунги кунда табиатшуносликнинг кўплаб соҳаларида Абел типигаги чизиқли интеграл тенгламаларни ечишга олиб келадиган масалалар кенг тарқалган. Абел типигаги тенгламаларга доимо алоҳида эътибор берилган. Бир қатор ишлар ушбу синф тенгламалари ечимларининг мавжудлиги, ягоналиги ва турғунлигига бағишланган [7, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Бугунги кунга келиб, биринчи тур Абел типигаги интеграл тенгламаларнинг сонли ечимларини олиш учун бир қатор ёндашувлар ишлаб чиқилган ва кенг қўлланилган. Турли хил ҳисоблаш алгоритмларининг умумий кўринишини, масалан, [7, 8, 9, 10] ишларда топиш мумкин.

Абел интеграл тенгламасининг масаласи ва ечими.

Механика ва математик физиканинг кўплаб масалалари интеграл тенгламаларни ечишга келтирилади. Функционал фазоларда бундай интеграл тенгламаларни ечишнинг оптимал тақрибий усулларини ишлаб чиқиш ҳисоблаш математикасининг долзарб вазифаларидан биридир. Ушбу ишда биз Соболев фазосида Абел интеграл тенгламасининг тақрибий аналитик ечиш учун оптимал квадратур формулалар усулини яратамиз. Эслатиб ўтамиз, бу ерда биз [60] иш натижаларидан фойдаланамиз.

Абел битта механик масалани кўриб чиқиш давомида биринчи бўлиб интеграл тенгламага дуч келган ва тенглама квадратура билан ҳал қилинди. Ушбу Абел масаласи, механиканинг бошқа муаммоларида бўлгани каби, уни дифференциал тенглама ёрдамида ифодалаш мумкин эмаслиги билан ҳам қизиқ ва тарихий жиҳатдан интеграл тенгламаларни кўриб чиқиш заруриятига олиб келган биринчи

масалалардан биридир. Абел масаласи қуйидагича:

Оғир m моддий нуқта тинч ҳолатидан вертикал текисликда ётган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин. t вақт баландлиги x бўлган эгри чизиғи бўйлаб ҳаракатланадиган m нуқта ўзининг қуйи ҳолатига эришиш учун x нинг функцияси сифатида зарур. Савол шундаки, эгри чизиқни қандай қуриш керак? Масалан, $t = const$ ҳолатида циклоида бўлиши маълум.

s орқали эгри чизиқ ихтиёрий нуқтасининг баландлигини, τ орқали уринманинг горизонтал ўқ билан ҳосил қилган бурчагини, g орқали оғирлик кучи тезланишини белгилаймиз (Расм.1.1).

Механикадан маълумки, энергиянинг сақланиш қонуни кинетик ва потенциал энергия тушунчаси ҳамда бажарилган иш тушунчаларини ўз ичига олади. Агар жисм тинч ҳолатда бўлса, унинг кинетик энергияси нўлга тенг бўлади. Жисмнинг кинетик энергияси жисм массаси m ва унинг ҳаракат тезлиги v га боғлиқ бўлади. Кинетик энергия қуйидаги формуладан аниқланади:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Ер юзасидан маълум бир баландликка кўтарилган жисм потенциал энергия эга. Жисмнинг потенциал энергияси жисм массаси m , эркин тушиш тезлашиши g ва жисмнинг ердан баландлиги h га боғлиқ. Потенциал энергия қуйидаги формуладан аниқланади:

$$E_p = mgh.$$

Жисмнинг тўла механик энергияси унинг кинетик ва потенциал энергиясининг йиғиндисига тенг, яъни

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Тўла механик энергия энергиянинг сақланиш қонуни таъсир қилган ва у ўзгармас бўлган ҳолларда қаралади.

Агар жисмнинг ҳаракатига ташқи кучлар таъсир қилмаса, масалан, бошқа жисмлар билан ўзаро таъсири бўлмаса, ишқаланиш кучи ёки ҳаракатга қаршилик кучи бўлмаса, у ҳолда жисмнинг тўла механик энергияси вақт ўтиши билан ўзгаришсиз қолади

$$E_k + E_p = const.$$

x баландликда, яъни тинч ҳолатда моддий нуқтанинг тўла механик энергияси қуйидагига тенг бўлади ($v = 0$)

$$E = mgx,$$

эгри чизиқ ихтиёрий нуқтасининг s баландлигида эса моддий нуқтанинг тўла механик энергияси

$$E = mgs + \frac{mv^2}{2}.$$

Жисмнинг тўла механик энергияси вақт давомида ўзгаришсиз қолиши туфайли биз қуйидагиларни оламиз

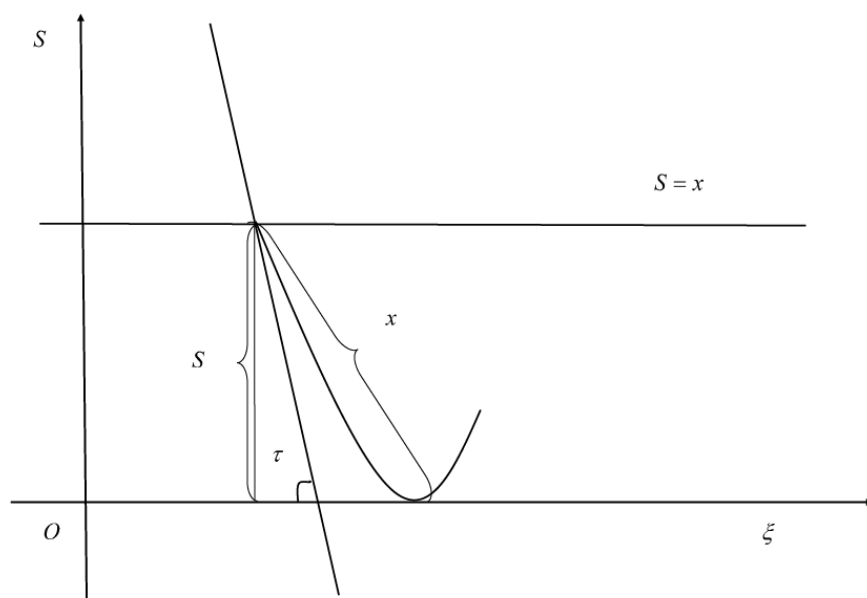
$$mgx = mgs + \frac{mv^2}{2},$$

у ҳолда, бу ердан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$v^2 = 2g(x - s);$$

ушбунни эътиборга олиб

$$\frac{ds}{dt} = v \sin \tau,$$



Расм.1.1 Моддий нуқта ҳаракат траекторияси.

топамиз:

$$\sqrt{2g(x-s)} = \frac{1}{\sin \tau} \frac{ds}{dt}, \text{ бундан нуқтанинг } s=x \text{ дан } s=0 \text{ гача кўчиши учун керак}$$

бўладиган $t(x)$ вақт:

$$-t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{1}{\sin \tau} \frac{ds}{\sqrt{x-s}}. \quad (1.9)$$

Маълум функция $-\sqrt{2gt}(x)$ ни $f(x)$ орқали белгилаймиз, қидирилаётган $\frac{1}{\sin \tau}$ ни

эса $\varphi(s)$ орқали белгилаб, (1.9) тенгламани қайтадан ёзамиз:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{x-s}}. \quad (1.10)$$

$\varphi(s)$ ни топиш орқали биз эгри чизиқ тенгламасини тузишимиз мумкин:

$$\frac{1}{\sin \tau} = \varphi(s),$$

бундан

$$s = \Phi(\tau).$$

Кейин,

$$d\xi = \frac{ds}{tg\tau} = \frac{\Phi'(\tau)d\tau}{tg\tau},$$

бундан

$$\xi = \int \frac{\Phi'(\tau)d\tau}{tg\tau} = \Phi_1(\tau),$$

яъни, қидирилаётган эгри чизиқ параметрик шаклдаги қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади:

$$\xi = \Phi_1(\tau), \quad s = \Phi(\tau).$$

Шундай қилиб, Абел масаласи қуйидаги тенгламалар синфига тегишли бўлган (1.10) интеграл тенгламани ечишга олиб келади:

$$f(x) = \int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds, \quad (1.11)$$

бу ерда $K(x,s)$ ядроси, $f(x)$ берилган функция ва $\varphi(s)$ эса номаълум функция.

(1.11) кўринишдаги тенглама биринчи тур Вольтерра интеграл тенгламаси дейилади.

Абел интеграл тенгламасининг ечими.

Қуйидаги формуладан фойдаланиб, (1.10) Абел тенгламасининг ечими берилиши мумкин:

$$\int_a^b \frac{ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}} = \pi. \quad (1.12)$$

Ҳақиқатан, (1.12) интегралда Эйлер алмаштириши ёрдамида

$$\sqrt{(b-s)(s-a)} = t(s-a) \Rightarrow b-s = t^2(s-a), \quad s = \frac{t^2a+b}{t^2+1},$$

$$ds = \frac{2at(t^2+1) - 2t(t^2a+b)}{(t^2+1)^2} dt, \quad \text{или} \quad ds = \frac{2t(a-b)}{(t^2+1)^2} dt.$$

Шундай қилиб, биз қуйдагини оламиз

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}} &= \int_0^\infty \frac{\frac{2t(a-b)}{(t^2+1)^2} dt}{t\left(\frac{t^2a+b}{t^2+1} - a\right)} = \int_0^\infty \frac{\frac{2(a-b)}{(t^2+1)^2} dt}{\frac{b-a}{t^2+1}} = \\ &= \int_0^\infty \frac{2dt}{t^2+1} = 2\arctgt \Big|_0^\infty = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi. \end{aligned}$$

Дастлаб хусусий ҳол $t(x) = const$ ни қараймиз, яъни

$$f(x) = -\sqrt{2gt(x)} = const.$$

Бу ҳолда (1.4) формуладан фойдаланиб, ($a=0, b=x$ бўлганда) $\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)s}} = \pi$,

ҳосил қиламиз:

$$\varphi(s) = -\frac{\sqrt{2gt}}{\pi\sqrt{s}},$$

ёки

$$\sin \tau = -\frac{\pi}{t} \sqrt{\frac{s}{2g}},$$

бундан

$$s = 2a \sin^2 \tau, \left(a = \frac{gt^2}{\pi^2}\right)$$

$$d\xi = \frac{ds}{tg\tau} = 4a \cos^2 \tau d\tau = 2a(1 + \cos 2\tau) d\tau$$

ва, демак

$$\xi = a \sin 2\tau + 2a\tau.$$

Шундай қилиб, қидирилаётган эгри чизиқ циклоида бўлади.

Энди умумий ҳолда ҳар қандай $f(x)$ учун, (1.12) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$\int_z^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-z)}} = \pi;$$

Охирги тенгликни иккала томонини ихтиёрый функция $\Psi(z)$ га кўпайтириб, 0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\pi \int_0^x \Psi(z) dz = \int_0^x \Psi(z) dz \int_z^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-z)}}.$$

Ўнг томонида интеграллаш тартибини ўзгартириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\pi \int_0^x \Psi(z) dz = \int_z^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)}} \int_0^s \frac{\Psi(z) dz}{\sqrt{(s-z)}}. \quad (1.13)$$

Бунга асосан, (1.10) тенгламани $f(0) = 0$ шартда ечамиз, агар

$$f(x) = \pi \int_0^x \Psi(z) dz, \text{ яъни } \Psi(x) = \frac{1}{\pi} f'(x) \text{ бўлса, у ҳолда}$$

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{\Psi(z) dz}{\sqrt{s-z}} = \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{f'(z) dz}{\sqrt{s-z}}. \quad (1.14)$$

Агар $f(0) \neq 0$ бўлса, унда биз $f(x) - f(0)$ учун олинган (1.14) ечимга $f(x) \equiv f(0)$ бошқа циклоидал ечимни бириктиришимиз керак, бўлаклар интеграллаб

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{f(z) dz}{\sqrt{s-z}} = \left[\begin{array}{l} u = f(z), \quad du = f'(z) dz \\ dv = (s-z)^{-\frac{1}{2}} dz, \quad v = -2(s-z)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \left[-2f(z)(s-z)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^s + 2 \int_0^s (s-z)^{\frac{1}{2}} f'(z) dz \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \left[2f(0)\sqrt{s} + 2 \int_0^s (s-z)^{\frac{1}{2}} f'(z) dz \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \frac{f'(z) dz}{\sqrt{s-z}} \right]. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, биз қуйидагини топамиз:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \frac{f'(z) dz}{\sqrt{s-z}} \right].$$

Ушбу формула Абел тенгламаси ечимини беради. Ушбу ечим физик аҳамиятга эга бўлади, агар у абсолют қиймати бўйича бирга тенг ёки ундан катта бўлса, чунки

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sin \tau}.$$

Абел тенгламаси ечимининг ягоналиги дарҳол (1.13) формуладан келиб чиқади. Ҳақиқатан, Абел тенгламасининг икки узлуксиз ечимларининг айирмаси $f(x) \equiv 0$ да шу тенгламани қаноатлантиради. Шунинг учун $\Psi(x)$ ни ўрнига бу фарқни қўйиб, биз ушбу формуладан бу айирма айнан нолга тенг деган хулосага келаемиз.

1-мисол. Қуйидаги Абел интеграл тенгламасини ечинг

$$e^x - 1 = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} \varphi(t) dt.$$

Бу ерда $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(x) = e^x - 1$.

Маълумки, ечим $\varphi(x) = \frac{e^x}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(\sqrt{x})$, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t} dt$ кўринишда бўлади.

Қаср ҳисоблаш усулида олинган сонли натижалар [3].

t_i	$N=1$	$N=10$	$N=100$	Аниқ ечим	Ҳатолик $\Delta_{N=100}$
0.1	0.2154319668	0.2152921762	0.2152904646	0.2152905021	3.75(-8)
0.2	0.3267280013	0.3258941876	0.3258841023	0.3258840762	2.61(-8)
0.3	0.4300194238	0.4275954299	0.4275658716	0.4275656575	2.14(-7)

$m = 1$ да оптимал квадратур формулалар усули билан олинган сонли натижалар

t_i	$N=1$	$N=10$	$N=100$	Аниқ ечим	Хатолик $\Delta_{N=100}$
0.1	.21543196693 2757	.21529217641 7085	.21529051971 2057	.21529050214 9370	1.76(-8)
0.2	.32672800143 8247	.32589418781 8910	.32588418258 6518	.32588407632 3292	1.062(-7)
0.3	.43001942383 2142	.42759543020 7042	.42756597103 2176	.42756565756 2313	3.13(-7)

$m = 2$ да оптимал квадратур формулалар усули билан олинган сонли натижалар

t_i	$N=1$	$N=10$	$N=100$	Аниқ ечим	Хатолик $\Delta_{N=100}$
0.1	.21529081574 7609	.21529050228 9374	.21529050214 9359	.21529050214 9370	1.1(-14)
0.2	.32588754175 6819	.32588407802 2475	.32588407632 3856	.32588407632 3292	5.64(-13)
0.3	.42757957141 3563	.42756566510 2724	.42756565756 4754	.42756565756 2313	2.441(-12)

$m = 3$ да оптимал квадратур формулалар усули билан олинган сонли натижалар

t_i	$N=1$	$N=10$	$N=100$	Аниқ ечим	Хатолик $\Delta_{N=100}$
0.1	.21529047967 3358	.21529050214 6621	.21529050214 9309	.21529050214 9370	6.1(-14)
0.2	.32588353956 7861	.32588407625 6839	.32588407632 3248	.32588407632 3292	4.4(-14)
0.3	.42756214389 6288	.42756565712 2205	.42756565756 1975	.42756565756 2313	3.38(-13)

Бу ерда ҳам [3] да тақрибий ечим $x = 0.1, 0.2$ ва 0.3 лар учун мос равишда максимал сонли $3.75(-8), 2.61(-8)$ и $2.14(-7)$ хатоликлар билан олинган. Аммо бизнинг усулимиз $m = 2$ бўлганда ҳам кичикроқ хатолик беради. Бу жадваллардан кўринадики, m нинг ортиши билан хатолик камайиб боради.

Хулосалар

Абелнинг интеграл тенгламалари. Абел интеграл тенгламаси масаланинг қўйилиши ва ечими берилган. Абел интеграл тенгламасининг ечими α каср тартибли ҳосилалар билан ифодаланган. Кейинчалик квадратур формулалар каср тартибли ҳосилаларни тақрибий ҳисоблаш учун қўлланилади. Шу мақсадда ушбу бобнинг учинчи параграфда Соболев фазосида квадратур формулаларни оптималлаштиришга бағишланган. Бу ерда экстремал функция аниқ топилган ва $L_2^{(m)}(0, t)$ фазодаги квадратур формулаларининг хатолик

функционали нормасининг квадрати ҳисобланган.

Абел типдаги сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун мураккаб оптимал квадратур формулалари аниқ қурилган. Бу ерда $L_2^{(1)}(0,t)$, $L_2^{(2)}(0,t)$ фазоларда мураккаб квадратур формулаларнинг оптимал коэффициентлари ҳам топилган. Кейин, $L_2^{(1)}(0,t)$ ҳолда оптимал квадратур формулаларнинг хатолик функционали нормасининг квадрати ҳисобланган

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати:

1. Abel N.H., Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales definies // Qesammelte mtematische werke. Leipzig : Tenbner, 1881.T.1, pp 11-27 (First publ. in Mag. Naturvidenkaserne, Anrgang 1.Bd2. Christiania 1823)
2. Liouville J., Mémoire sur quelques Quéstions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quéstions. Journal de l'école Polytechnique, 1832, T.13, sect.21, pp1-69.
- 3.Salman Jahanshahi, Esmail Babolian, Delfim F.M. Torres, Alireza Vahidi, Solving Abel integral equations of first kind via fractional calculus, Journal of King Saud University – Science (2015) 27, 161–167.
- 4.Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул . -М.,1974,808с.
- 5.Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы . Новосибирское издательство СОРАН , 1996,448с.
6. GorenfloR., VessellaS. Abe lintegral equations. Analysis and applications. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.
7. Anderssen R. S. Application and numerical solution of Abel-type integral equation // Technical Summary Report № 1787, September 1977.— Madison: University of Wisconsin-Madison, Mathematics Research Center.
8. Преображенский Н. Г., ПикаловВ. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. — Новосибирск: Наука, 1982.
9. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. — Новосибирск: Наука, 1984.
10. Бухгейм А. Я. "Уравнения Вольтерра и обратные задачи. — Новосибирск: Наука, 1983.
11. Vessella S. Stability results for Abel equation // Journal of Integral Equations. 1985. - Vol. 9. - P. 125-135.
12. Грынъ В. И. О существовании, единственности и устойчивости решений уравнения Абеля // Рукопись деп. в ВИНТИ 09.06.1995, № 1715-B95.
13. Gorenflo R., Yamamoto M. Operator Theoretic Treatment of Linear Abel Integral Equations of First Kind // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics.-1999.-Vol. 16.-P. 137-161.
14. Baker C.T. H. A perspective on the numerical treatment of Volterra equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 125.-P. 217-249.
15. Minerbo G. N., Levy M. E. Inversion on Abel's integral equation by means of orthogonal polynomials // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1969. — Vol. 6, JV* 4.-P. 598-616.
- 16.Saleh, M.H., Amer, S. M., Mohammed, D., Mahdy, A.E. (2014). Fractional calculus for solving generalized Abel's integral equations using Chebyshev polynomials, International Journal of

Computer Applications, Vol. 100, pp. 19–23.

17. Begaliyevich, N. C., Obidjonovich, N. Z., & Bahodir og'li, A. O. (2022). SOLVING MULTIDIMENSIONAL PROBLEMS WITH A WEAK APPROXIMATION METHOD. *Galaxy International Interdisciplinary Research Journal*, 10(5), 949-955.

18. Shamsiddinovich, M. R., & Obidjonovich, Z. N. (2021). Advantages and Improvements of E-Textbook Teaching of Computer Science in General Secondary Educatin. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES*, 2(12), 71-74.

19. Якубов, С. Х., Хамраев, А. А., Хушбоков, И. У., & Нурматов, З. О. (2022). АЛГОРИТМИЗАЦИЯ САПР ОПТИМИЗАЦИИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ. *Universum: технические науки*, (11-1 (104)), 53-59.

