



## BURCHAKNI UCHTA TENG BO'LAKKA BO'LISH MASALASI VA TRISEKTRISA HAQIDA

**E.U.Xolmurodov**

Halima Xudoyberdiyeva nomidagi ijod maktabi  
matematika fani o'qituvchisi

**A.M.Dodobayev**

TKTI Yangier filiali katta o'qituvchisi, Guliston, O'zbekiston  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.7847976>

### ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 10-april 2023 yil  
Ma'qullandi: 15-april 2023 yil  
Nashr qilindi: 20-april 2023 yil

### KEY WORDS

*muntazam burchak, kubni ikkilantirish, doirani kvadratga aylantirish, burchakni uchta teng bo'lakka bo'lish, trisektrisa, Arximed, Dekart, Eten Paskal, Cheva Jovanni, Morli teoremasi.*

### ABSTRACT

*Ushbu ishda matematika fani rivojlanishida muhim o'rin egallagan mashhur klassik masalalardan birining tarixi va yechilish usulidan biri aks etgan. Shuningdek, matematik metodlar va ularning rivojlanishi haqida qiziqarli ma'lumotlar keltirilgan.*

*Ushbu ish matematikani o'rganishni boshlovchilarga-birinchi kurs talabalariga va o'rta maktabning yuqori sinfo'quvchilariga mo'ljallangan.*

Matematikada shunday masalalar borki, ularning yechimi unchalik katta ahamiyatga ega emas. Biroq bu masalalarni yechish jarayonida boshqa ko'plab muammolar hal etilgan. Fermaning buyuk teoremasi, kubni ikkilantirish, doirani kvadratga aylantirish va shunga o'xshash boshqa masalalarni shular qatoriga kiradi.

Ushbu maqolada shu kabi masalalardan biri haqida so'z boradi.

**Masala:** Berilgan ixtiyoriy burchakni faqat sirkul va chizg'ich yordamida teng uch bo'lakka bo'lish mumkinmi?

Tabiiy savol tug'ilishi mumkin: nega faqat sirkul va chizg'ich yordamida? Yuqorida qayd etilganidek, agar faqat sirkul va chizg'ichdan foydalanib bu kabi masalalar hal etilsa, shu bilan birga ko'plab boshqa katta ahamiyatga ega bo'lgan masalalar o'z yechimini topadi.

Bundan tashqari, bu masalaning kelib chiqishini quyidagicha ham asoslash mumkin: berilgan kesmani teng uch bo'lakka bo'lish kerak bo'lsa (kesmani  $n$  bo'lakka bo'lish masalasi ham), sirkul va chizg'ich yordamida osonlikcha hal etish mumkin. Xuddi shu kabi aylananing ajratilgan yoyini teng uch bo'lakka bo'lish masalasini ham ko'rish mumkin. Bu masala esa shu yoyga tiralgan burchakni teng uch bo'lakka bo'lish masalasiga kelib qoladi.

Bu masalani faqat geometrik usuldan foydalanib yechib bo'lmagani uchun, algebraik usullardan foydalanishga to'g'ri keladi.

Tadqiqotning maqsadi – berilgan ixtiyoriy burchakni faqat sirkul va chizg'ich yordamida teng uch bo'lakka bo'lish masalani faqat geometrik usuldan foydalanib yechib bo'lmasligini algebraik usullardan foydalanib ko'rsatishdir.

**Tadqiqot ob'ektlari va qo'llanilgan usullar**

Ushbu maqolaning tadqiqot ob'ektlari – yasashga doir bo'lgan uchta klassik masalalar: kubni ikkilantirish, burchak triseksiyasi va doirani kvadratga aylantirish masalalari hamda ularga olib kelinuvchi masalalar hisoblanadi.

Burchakni teng uch bo'lakka bo'lish masalasining sirkul va chizg'ich yordami yechib bo'lmasligi ma'lum bo'lgach, bu masalani yechishning boshqa usullari topilgan. Ana shunday usullardan ba'zilari: Arximed usuli, Dekard usuli, E.Paskal usuli va Cheva usulidir.

### Olingan natijalar va ularning tahlili

Shunday qilib, sirkul hamda chizg'ich yordamida nima qilinadi? To'g'ri chiziq chiziladi, aylana chiziladi, ular kesishish nuqtalari aniqlanadi, bu nuqtalar orqali yana to'g'ri chiziq yoki aylana chiziladi, aylananing markazi topiladi va hokazo ishlar amalga oshiriladi.

Tekislikda ixtiyoriy nuqta  $(a,b)$  koordinataga ega, har bir to'g'ri chiziq

$$Ax + By + C = 0$$

tenglama bilan, har bir aylana esa  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  tenglama bilan aniqlanadi.

Bu tenglamaning koeffitsientlari aniq sonlardir. Ikkita to'g'ri chiziq tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{aligned} Ax_1 + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Bu to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini topish uchun, bu tenglamalar sistemasini yechimini topish kerak. (1) dan  $y$  ni yo'qotib

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0 \quad (2)$$

ni hosil qilamiz. (2) dan  $x$  ni topib (1) dagi ixtiyoriy tenglamadan  $y$  ni ham aniqlaymiz.

Shunday qilib ikki to'g'ri chiziq kesishish nuqtasini topish masalasini (1) ko'rinishdagi koeffitsientlari butun sonlardan iborat sistemani yechish masalasiga kelib qoldi.

Endi to'g'ri chiziq va aylana berilgan bo'lib ularning kesishish nuqtasini topish kerak bo'lsa,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

sistemaga kelamiz. Birinchi tenglamadan  $y$  ni topib ikkinchisiga qo'yamiz:

$$y = -\frac{A_1x + C_1}{B_1},$$

$$x^2 + \left(\frac{A_1x + C_1}{B_1}\right)^2 + A_2x - B_2\frac{A_1x + C_1}{B_1} + C_2 = 0.$$

Buni esa soddalashtirib yozamiz:

$$(A_1^2 + B_1^2)x^2 + (2A_1C_1 + A_2B_1 - A_1B_1B_2)x + C_1^2 - C_1B_1B_2 + C_2B_1^2 + 0. \quad (4)$$

Hosil bo'lgan kvadrat tenglamaning koeffitsientlari butun sonlardan iborat. (4) ni (2) tenglamadan farqi bu yerda koeffitsientlarni kvadratga oshirish amali ham ishlatilgan. (4) ni belgilashlar yordamida

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (5)$$

ko'rinishida yozib olamiz. (5) ning ildizlari

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (6)$$

ko'rinishida bo'ladi.

Endi ikkita aylana berilgan bo'lsin:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

Ularning kesishgan nuqtasini topish uchun tenglamalarni  $x$  va  $y$  ga nisbatan yechish kerak.

(7) dagi birinchi tenglamadan ikkinchisini ayirib, uni birinchi tenglama bilan birga olsak

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

ni hosil qilamiz. (8) sistema (7) ga ekvivalent ekanligini ko'rish qiyin emas. Biz natijada (7) ko'rinishidagi sistemani yechishni, (3) ko'rinishdagi sistemani yechishga keltirish mumkin ekan.

Shunday qilib masalalarni sirkul hamda chizg'ich yordamida yechimni (2) (chiziqli) yoki (5) (kvadratik) tenglamalarni yechishga keltirish mumkin ekan.

Endi esa topilgan nuqtalardan yana to'g'ri chiziq yoki aylana o'tkazish kerak bo'ladi. Biz yana (2) yoki (5) ko'rinishdagi tenglamalarga kelamiz, biroq bu tenglamalarning koeffitsientlari endi butun sonlar yoki (6) ko'rinishdagi sonlar kabi bo'ladi.

Masalan,

$$\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - a_1c_1}}{a_1}x^2 + \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - a_2c_2}}{a_2}x + 1 = 0\quad (9)$$

ko'rinishidagi tenglamalar hosil bo'lsin. Bu tenglamani shakl almashtirishlar yordamida ildizli ifodalarni bir tomonga o'tkazib kvadratga oshirishni ikki marta bajarilsa, oxirida

$$p_0x^8 + p_1x^7 + \dots + p_7x + p_8 = 0\quad (10)$$

ko'rinishidagi 8-darajali tenglamaga kelamiz.

(10) tenglamaning barcha koeffitsientlarini butun sonlar deb hisoblash mumkin.

(10) tenglamani darajasi  $2^3$  ekanligini eslatib o'tamiz.

Bu esa (9) kvadrat tenglama ikki marta kvadratga oshirilishdan hosil bo'lgan. Shunday qilib, sirkul hamda chizg'ich yordamida masalani yechish  $2^n$ -darajali butun koeffitsientli algebraik tenglamalarni yechishga keltirilgan ekan.

Yana shuni eslatib o'tish joizki, biror bir masalani yechimi darajasi  $2^n$  ga teng bo'lmagan tenglamani yechishga kelib qolishi mumkin. Bu hali masalani sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydi degani emas. Agar koeffitsientlari ixtiyoriy butun sonlardan iborat bo'lgan

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0\quad (11)$$

tenglama ratsional ildizga ega bo'lsa, u holda masala sirkul hamda chizg'ich yordamida yechiladi deyiladi.

Bu holda tenglama ratsional sonlar maydonida keltirilgan tenglama deyiladi.

Shunday qilib, bu masalani sirkul hamda chizg'ich yordamida yechib bo'lmasligi uchun darajasi  $2^k$  ko'rinishida bo'lmagan tenglama ratsional sonlar maydonida keltirilmas bo'lishi yetarli ekan.

Endi burchakni teng uch bo'lakka bo'lish masalasiga qaytamiz. Teng uch bo'lakka bo'lmoqchi bo'lgan burchagimizni  $3\alpha$  va  $\cos 3\alpha = p$  bo'lsin.  $\cos \alpha = x$  deb belgilaymiz. Agar biz  $x$  ni qura olsak,  $\alpha$  burchakni ham qura olgan bo'lamiz, ya'ni berilgan burchakni teng uchga ajratgan bo'lamiz. Haqiqatdan ham, uzunligi  $x$  ga teng bo'lgan  $OA$  kesmani yasaymiz,  $A$  nuqtadan esa  $OA$  ga perpendikulyar  $O$

nuqtadan bir birlik masofada yotgan  $B$  nuqtani belgilaymiz (1-pacm).

Ikkinchi tomondan,

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = \\ &4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = 4x^3 - 3x\end{aligned}$$

Shunday qilib,  $4x^3 - 3x - p = 0$  tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama berilgan burchakni teng uch bo'lakka bo'lishdan hosil bo'lgan tenglamadir. Tenglamaning darajasi  $2^k \neq 3$ . Shu bilan birga  $p$  parametrni ixtiyoriy tanlaganimizda hosil bo'lgan tenglama ratsional sonlar maydonida har doim ham keltiriladigan bo'lavermaydi. Bu esa berilgan burchakni sirkul va chizg'ich yordamida teng uch bo'lakka bo'lish mumkin emasligini bildiradi.

### Qisqacha tarixiy ma'lumot.

Burchak triseksiyasi (ya'ni, burchakni teng uch bo'lakka bo'lish) masalasining rivojlanishi haqida hech qanday qiziqarli afsonalar yo'q. Taxminlarga ko'ra, bu masala matematikaning ichida, muntazam ko'pburchak qurish masalasining yechilish jarayonida vujudga kelgan (Prasolov, 1992).

Sirkul va chizg'ich yordamida  $n=6$  va  $n=8$  bo'lganda muntazam  $n$ -burchak qurish mumkin. Ammo,  $n=7$  va  $n=9$  bu ishni qilib bo'lmaydi. Muntazam yettiburchakni yasash qiziqarli masala, uni "qo'yish" usuli bilan yechish mumkin. Muntazam to'qqizburchakni yasash masalasi bevosita burchak triseksiyasi masalasiga kelib taqaladi, chunki muntazam to'qqizburchakni yasash uchun,  $\frac{360^\circ}{9} = \frac{120^\circ}{3}$  burchakni yasash kerak bo'ladi, ya'ni  $120^\circ$  li

burchakni uchta teng qismga bo'lish kerak bo'ladi.

Burchak triseksiyasi (ya'ni, burchakni teng uch bo'lakka bo'lish) masalasining sirkul va chizg'ich yordami yechib bo'lmashligi ma'lum bo'lgach, bu masalani yechishning boshqa usullari topilgan (Prasolov, 1992). Ana shunday usullardan ba'zilari: mashhur fransuz matematigi Rene Dekardga va mashhur italiyalik geometr Cheva Djovanniga tegishli (Prasolov, 1992, c.46).

Yana suni ta'kidlab o'tish joizki, uchburchak burchaklarining triseksiyalari ajoyib xossalarga ega.

$ABC$  uchburchak  $BC$  tomonidan  $D$  va  $E$  nuqtalarni shunday tanlaymizki,  $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC = \frac{1}{3} \angle BAC$  bo'lsin.  $AD$  va  $AE$  kesmalar  $ABC$  uchburchak  $A$

burchagi *trisektrisalari* deb ataladi. Trisektrisalarning eng ajoyib xossasi bu – Morli teoremasi hisoblanadi. Morli teoremasi quyidagicha:  $ABC$  uchburchak  $B$  va  $C$  burchaklarining  $BC$  tomoniga yaqin trisektrisalari  $A_1$  nuqtada kesishsin (2-rasm).  $B_1$  va  $C_1$  nuqtalar ham xuddi shunday aniqlanadi. U holda  $A_1B_1C_1$  uchburchak tengtomonlidir (Prasolov, 1991).

Uchburchakning nafaqat ichki burchak trisektrisalari, balki tashqi burchak trisektrisalari ham ajoyib xossalarga ega (Sharigin, 1986).

**Qiziqarli masala.** Bir xil  $R$  radiusli aylanalarning  $O$  va  $O_1$  markazlari orasidagi masofa  $R$  ga teng bo'lsin. Aytaylik,  $A$  va  $B$  nuqtalar aylanalardan shunday tanlanganki,  $OO_1 \parallel AB$  (3-rasm).  $OC$  kesma  $AOB$  burchak trisektrisasi ekanligini isbotlang.

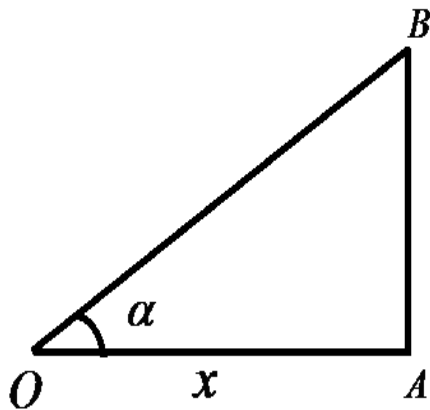
### Xulosa

Ushbu maqola yasashga doir uch klassik masalalardan biriga, ya'ni burchak trisektsiyasi (burchakni teng uch bo'lakka bo'lish) masalasiga bag'ishlangan. Ishda bu masalani faqat sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmasligi algeraik usulda ko'rsatildi.

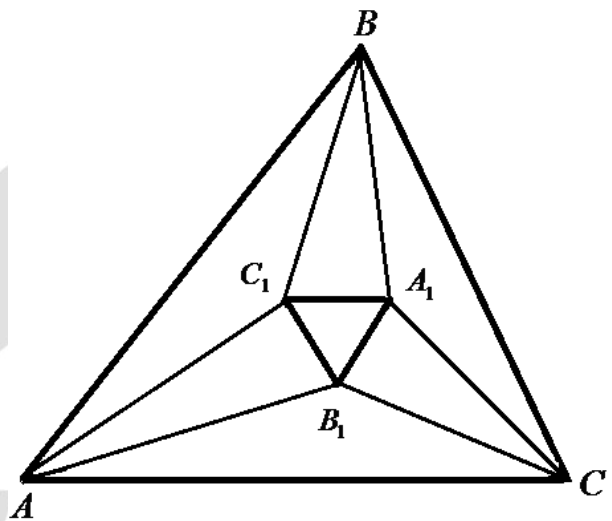
Shuningdek, uchburchak burchaklari trisektsiyalari – trisektrisalarning ajoyib xossalaridan ba'zilari keltirib o'tildi.

**Adabiyotlar ro'yxati:**

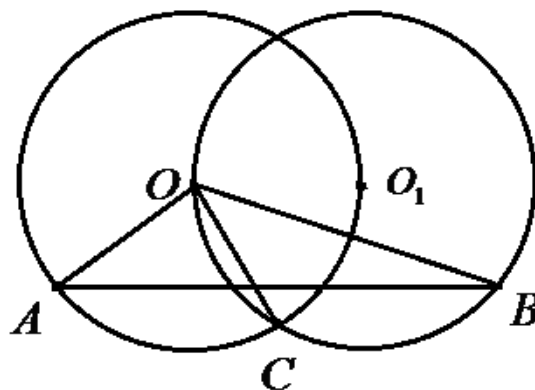
1. Prasolov V.V. Zadachi po planimetrii. M.: Nauka, 1991.-172 c.
2. Sharigin I.F. Planimetriya. M.: Nauka, 1986.-137 c.
3. Prasolov V.V. Tri klassicheskie zadachi na postroenie. M.: Nauka, 1992.- 80 c.



1-расм.



2 – rasm.



3 – rasm.