STOKS KUCHINING NAZARIY ISBOTI VA UNING REYNOLD SONI BILAN SUYUQLIK OQIMIDAGI BOG`LIQLIGINI O`RGANISH

Bo`ronov Musobek Orifovich
O`zbekiston Milliy universiteti
Fizika fakulteti 1-kurs talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.15656412

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 01-June 2025 yil
Ma'qullandi: 07- June 2025 yil
Nashr qilindi: 13- June 2025 yil

KEYWORDS

Past Reynold soni qiymatlarida (Re < 1) suyuqlikda harakatlanayotgan sferaga ta'sir qiladigan kuch Stoks kuchi deb ataladi va u quyidagicha ifodalanadi:

ABSTRACT

Ushbu maqolada Stoks kuchi tushunchasi, uning Navye-Stoks tenglamasidan kichik Reynold soni holatida chiqarilishi ko'rib chiqiladi. Maqolada laminar va turbulent oqimlar orasidagi farqlar, Reynold sonining oqim rejimiga ta'siri va suyuqliklar qovushqoqligini aniqlashda laboratoriya usullarining qo'llanilishi muhokama qilinadi. Shuningdek, Puazeyl va Stoks formulalari yordamida qovushqoqlik koeffitsientini topish usullari yoritilgan.

Past Reynold soni qiymatlarida (Re < 1) suyuqlikda harakatlanayotgan sferaga ta'sir qiladigan kuch **Stoks kuchi** deb ataladi va u quyidagicha ifodalanadi:

$F_s = 6\pi\eta r v$

Bu yerda:

- **η** — suyuqlikning qovushqoqlik koeffitsienti
- **r** — sferaning radiusi
- **v** — sferaning suyuqlikdagi tezligi

Bu formula kichik Reynolds soni holatlarida o'rinlidir.

Reynold soni

$\mathrm{Re} = \frac{\rho\vartheta l}{\eta}$

ρ suyuqlik yoki gazning zichligi

ϑ oqimning (nayning kesimi bo`yicha olingan o`rtacha) tezligi

η suyuqlik (yoki gazning) qovushqoqlik koeffitsienti

l ko`ndalang kesim uchun xarakterli bo`lgan o`lcham. Misol: kesim kvadrat bo`lsa, kvadrat tomoni, kesim doira bo`lsa, radius yoki diametr.

Re*-reynold soni kritik qiymati

Bu kritik qiymat suv uchun 1200.

- Agar **Re < Re*** — oqim **laminar**
- Agar **Re > Re*** — oqim **turbulent**

Stoks kuchi isboti

Navier Stoks tenglamasini, kichik Reynold son qiymatlarida anchagina soddalashtirish mumkin. Siqilmaydigan uzluksiz oqim uchun bu oqim quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

$(vgrad)v = -\left(\frac{1}{\rho}\right) gradp + \left(\frac{\eta}{\rho}\right)\Delta v$ (1)

Bu yerda $\left(\frac{\eta}{\rho}\right)\Delta v$, $\frac{\eta u}{\rho l^2}$ ning miqdori. $(vgrad)v$ $\frac{u^2}{l}$ ning miqdori. Reynold soni kichik bo`lganda, tenglama quyidagi holatga soddalashadi:

$\eta\Delta v - gradp = 0$ (2)

qo`shimchasiga 2ta tenglikni ham yozib olamiz:

$div\ v = 0$. $\Delta curl\ v = 0$ (3) oxirgi tenglik 2 tenglamadan curl olish orqali aniqlanadi.

Qovushqoq suyuqlikda, sferaning o`zgarmas tezlik bilan harakatlanayotgan holatini ko`rib chiqaylik. Oqimni uzluksiz deb hisoblasak, shar suyuqlikda u o`zgarmas tezlik bilan harakatlanganda, vaqt o`tishi bilan oqim tezligi o`zgarib turadi. Shu sababli, $div\ (v-u) = div\ v = 0$, $v-u$ qandaydir A vektorning curl I deb hisoblash mumkin: $v-u = curl\ A$ ($curl\ A$ cheksizlikda nolga teng). Tezlikka o`xshab, A vektorning curl I qutbiy bo`lishi uchun, A o`q bo`lishi kerak. A vektorda, u parametr chiziqli bo`lishi kerak, chunki harakat tenglamasi chiziqlidir. Hamma shartlarni qanoatlantiradigan A(r) vektorning umumiy ko`rinishi A=f`(r)n*u, bu yerda n r vektorga parallel yo`nalgan (r vektor shar markazida yo`nalishida olingan) bo`lib, f`(r) rning skalyar funksiyasidir. O`z navbatida f`(r) funksiyanin, f(r) funksiyaning gradienti deb qarashimiz mumkin. Shu sababli biz tezlikni quyidagi ko`rinishda qidiramiz (bu yerda u=const):

$v = u + curl(gradf * u) = u + curl\ curl\ (fu)$ (4)

f funksiyani aniqlash uchun (3) tenglikdan foydalanamiz:

$curl\ v = curl\ curl\ curl\ (fu) = (grad\ div - \Delta)\ curl\ (fu) = -\Delta curl\ (fu)$

(3) tenglama quyidagi ko`rinishida yozishimiz mumkin:

$\Delta^2 curl\ (fu) = \Delta^2(graf\ f * u) = (\Delta^2 gradf) * u = 0$. Bundan kelib chiqadiki:

$\Delta^2 grad\ f = 0$. (5)

Ifodani integrallasak:

$\Delta^2 f = const$Bu konstanta nol bo`lishi kerakligini ko`rish oson, chunki tezlik farqi $v-u$ to`laligicha yo`qolishi kerak . $\Delta^2 f$ ifoda 4-tartibli hosilani o`z ichiga oladi , shu paytda tezlik f ning 2-tartibli hosilasiga teng bo`ladi. Shu sababli bizda quyidagi ifoda bor:

$\Delta^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\delta}{\delta r}\right)\Delta f = 0$. Keyin:

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c$$

$v-u$ farqi to`laligicha yo`qolishi uchun, c o`zgarmas son nolga teng bo`lishi kerak. $\Delta f = \frac{2a}{r}$ dan keyin, niz quyidagi natijaga erishamiz:

$f = ar + \frac{b}{r}$ (6)

O`zgarmas qo`shimcha sonlar tashlab yuboriladi, chunki ular biz uchun ahamiyatsiz (f ning hosilasi v tezlik bo`ladi). (4) tenglikni o`rniga keltirib qo`ysak:

$v = u - a\frac{u+n(u*n)}{r} + b\frac{3n(u*n)-u}{r^3}$. (7) shu ishni

Chegara holatlaridan, a va b o`zgarmas sonlar aniqlanadi. Shar sirtida (r=R), v=0:

$-u\left(\frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} - 1\right) + n(u*n)\left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3}\right) = 0$

Bu tenglik hamma n uchun o`rinli bo`lishi uchun, u va $n(u*n)$ larning koeffitsientlari yo`qolishi kerak. Shunda $a=\frac{3}{4}R\ b=\frac{1}{4}R^3$. Vanihoyat:

$\boldsymbol{f}=\frac{3}{4}R+\frac{1}{4}\frac{R^3}{r}$ **(8)**

$\boldsymbol{v}=-\frac{3}{4}R\frac{u+n(u*n)}{r}-\frac{1}{4}R^3\frac{u-3n(u*n)}{r^3}+u$ (9)

Sferik qutbda, komponentlar u o`qiga parallel,

$\boldsymbol{v_r=ucos\theta\left[1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right]}$

$\boldsymbol{v_\theta=-usin\theta\left[1-\frac{3R}{4r}-\frac{R^3}{4r^3}\right]}$ **(10)**

Bu harakatlanayotgan sferaning tezliklar bo`yicha taqsimotini beradi. Bosimni aniqlash uchun, (4) ni (1) tenglikka keltirib qo`ysak:

$grad\ p=grad\ \eta\Delta v=\eta\Delta curl\ curl\ (fu)=\eta\Delta(grad\ \text{div}\ (\text{fu})-\text{u}\Delta f)$

$\Delta^2 f=0$ va $grad\ p=grad\ [\eta\Delta\ div(fu)]=grad(\eta u*grad\Delta f)$.

$\boldsymbol{p}=\eta\text{u}*\text{grad}\Delta f+p_0$ (11)

Bu yerda p_0 cheksizlikdagi suyuqlik bosimi. f ni o`rniga qo`yish orqali oxirgi natijaga yetib kelamiz:

$\boldsymbol{p}=p_0-\frac{3}{2}\eta\frac{u*n}{r^2}R$ (12)

Tepadagi formulani ishlatish orqali, biz jismga ta`sir qilayotgan F kuchni hisoblay olamiz. Shu ishni bajarish uchun, biz u ga parallel bo`lgan o`q bilan sferik qutbiy koordinatalarni olamiz; simmetriklik xossasi tufayli, hamma miqdorlar r va qutb burchagi $\theta$ ning funksiyalari bo`ladi. F kuch u tezlikka parallel yo`nalgan. **(15.14) tenglikka ko`ra bu kuchni hisoblay olamiz.** Bu formuladan, komponentalar bo`yicha yuzaga normal va tangensial yo`nalgan, sfera yuzasidagi har bir elementga ta`sir qiladigan kuchlarni olib va bu komponentalarni u tezlik yo`nalishi bo`yicha olsak, biz quyidagini topamiz:

$F=\oint(-p\cos\theta+\grave{\sigma}_{rr}\cos\theta-\grave{\sigma}_{r\theta}\sin\theta)df,$ (13)

Bu yerda integral sferaning butun yuzasi bo`yicha olinadi. (10) tenglamani, formulaga qo`yish orqali

$\grave{\sigma}_{rr}=2\eta\frac{\partial v_r}{\partial \text{r}},\quad \grave{\sigma}_{r\theta}=\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{\text{r}}\right)$

Sfera yuzasini topadigan bo`lsak: $\grave{\sigma}_{rr}=0\quad \grave{\sigma}_{r\theta}=-\left(\frac{3\eta}{2r}\right)u\sin\theta$, shu paytda bosim (12) ga ko`ra

$p=p_0-\left(\frac{3\eta}{2R}\right)u\cos\theta$. Shu sababli (13) tenglikdagi integral $F=\left(\frac{3\eta u}{2R}\right)\oint df$.

Vanihoyat biz, suyuqlikda sekin harakatlanayotgan sferaga ta`sir qiladigan Stoks kuchi formulasiga kelamiz:

$$F=6\pi\eta\text{Ru}\ \ (14)$$

Ushbu formula laminar oqimda sekin harakatlanayotgan jism uchun qo‘llaniladi.

Laboratoriya

Odatda laboratoriya mashg`ulotlarida, Stoks kuchi formulasidan, tekshirilayotgan suyuqlikning qovushqoqlik koeffitsientini topishda foydalaniladi.

$F_A+F_S=mg$

$F_A=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_s g$ va $F_S=6\pi R\eta\vartheta\ \ mg=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_j g$

$6\pi R\eta\vartheta = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_j - \rho_s)$

$\eta = \frac{2R^2 g(\rho_j - \rho_s)}{9\vartheta}$

Qovushqoqlik koeffitsientini, **Puazeyl formulasi** orqali ham hisoblab topish mumkin:

$\boldsymbol{V = \frac{\pi R^4(p_1 - p_2)}{8\eta l} t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta = \frac{\pi R^4(p_1 - p_2)}{8Vl} t}$

V-t vaqt ichida naydan oqib o`tgan suyuqlik hajmi, R-kapilyar nayning radiusi, ΔP-bosimlar farqi, l-kapilyar nayning uzunligi, η-tekshirilayotgan suyuqlikning qovushqoqlik koeffitsienti

Xulosa

Ushbu maqolada Stoks kuchining fizik mohiyati, uning Navye-Stoks tenglamalaridan hosil qilinishi va past Reynolds soni sharoitida qo‘llanishi tushuntiriladi. Laminar va turbulent oqimlarning farqlari, oqim rejimining Reynold soniga bog‘liqligi, hamda suyuqliklarning qovushqoqligini aniqlashda laboratoriya metodlarining ahamiyati ko‘rsatiladi. Mexanikaning bu sohalarida soddalashtirilgan matematik yondashuvlar asosida aniqlik bilan natijalarga erishish mumkinligi isbotlashimiz mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati:

1. MIT OCW. Flow Past a Sphere II: Stokes’ Law…
2. SpringerLink. “Basic Concepts of Stokes Flows,” chapter in Stokes Flows (2019).
3. Stokes, G. G. (1851). On the effect of internal friction… Transactions of the Cambridge Philosophical Society.
4. MDPI. “The Universal Presence of the Reynolds Number” (2023).
5. MDPI. “The Reynolds number: A journey from its origin…” (2022).
6. Wikipedia. “Reynolds number,” “Navier–Stokes equations,” “Stokes' law.”
7. Lautrup, B. “Creeping flow,” in Theoretical Fluid Mechanics (2004).
8. Geo LibreTexts. “Flow Past a Sphere at High Reynolds Numbers.”
9. AGU/Wiley. “Assessment of the validity of Stokes and Reynolds equations ...” (2014).
10. Royal Society A. “Terminal fall velocity: the legacy of Stokes…” (2019).
11. J. Fluid Mech. “Effects of Reynolds number and Stokes number in turbulence” (2018).