



KAPALAK HAQIDAGI TEOREMA VA UNING TURLI ISBOTLARI

Abjalilov Sanaqul Xo'jamovich

NavDU dotsenti

Ashurova Dilfuza Nabiyevna

NavDU dotsenti

Sadikova Dilshoda Aminjon qizi

NavDU o'qituvchisi

abjalilovsanaqul72@gmail.com

Navoiy davlat universiteti, O'zbekiston

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15357775>

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 01-May 2025 yil

Ma'qullandi: 05-May 2025 yil

Nashr qilindi: 07-May 2025 yil

KEYWORDS

Aylana, vatar, vertikal
burchaklar, siniq chiziq, aylana
yoyi, o'rta perpendikulyar,
uchburchak.

ABSTRACT

Maqolada matematikaning ajoyib teoremlaridan biri hisoblanuvchi Kapalak haqidagi teorema va uning turli isbotlari to'g'risida so'z yuritilgan. Har bir isbotlash usuli qat'iy isbotlangan teoremlar yordamida keltirilgan.

Qadimgi Yunonistonda barcha fanlar singari matematika, xususan geometriya fani ham yangicha qat'iy talablar asosida rivojlantirildi. Eramizdan avvalgi III asrda Yevklid o'zining "Negizlar" asari bilan geometriyani aksiomatik kiritilishiga ajoyib yakun yasadi. Ushbu yondashuv geometriyani qat'iy isbotlar asosida mukammal taraqqiy etishini ta'minladi.

Antik davrdan aylana va uchburchakka tegishli bo'lgan juda ko'p ajoyib teorema va masalalar paydo bo'ldiki, bu teorema va masalalar hozirgi kungacha darslik va o'quv qo'llanmalarimizni bezab kelmoqda. Jumladan, Pifogor, Fales, Yevklid, Arximed, Apolloniy, Eyler, Gauss, Cheva, Menelay, Styuart, Morley kabi buyuk tarixiy olimlar nomi bilan bo'g'liq teorema va masalalar mavjud.

Yuqoridagi kabi Kapalak haqidagi teorema ham mashhur bo'lib, qat'iy isbotlari bilan barcha qiziquvchilarni o'ziga rom etib kelmoqda. Ushbu teoremani Britaniyalik olim Uilyam Uolles (23.09.1768 - 28.04.1843) 1803 yilda "The Gentlemen's Mathematical Companion" (Janoblarning matematik hamrohi) nomli jurnalda chop ettirgan.

Biz quyida kapalak haqidagi teoremaning ba'zi isbotlarini tahlil qilishga harakat qilamiz.

Teorema. Berilgan aylana AB vatar o'rtasi C nuqtadan ikkita KL va MN vatarlar o'tkazilgan (K va M nuqtalar AB vatardan bir tomonda yotadi). KN va LM kesmalar AB vatarni mos ravishda P va Q nuqtalarda kesib o'tsa, u holda PC va QC kesmalar teng bo'ladi.



Isbot. *Birinchi usul.* QX va QY kesmalar mos ravishda CQM va CQL uchburchaklarning, PZ va PT kesmalar esa CPK va CPN uchburchaklarning balandliklari bo'lsin.

Bittadan burchaklari to'g'ri burchak hamda o'zaro vertikal burchaklari bo'yicha ΔCQX va ΔCPT hamda ΔCQY va ΔCPZ uchburchaklar o'xshash bo'ladi. Har ikkala uchburchaklar juftliklari uchun o'xshashlik koeffitsiyenti umumiy $\frac{CQ}{CP}$ qiymatga teng. Shuning uchun

$$\frac{CQ}{CP} = \frac{QX}{PT} = \frac{QY}{PZ}$$

Bundan,

$$\frac{CQ^2}{CP^2} = \frac{QX}{PT} \cdot \frac{QY}{PZ} = \frac{QX}{PZ} \cdot \frac{QY}{PT}$$

$\angle NKL$ va $\angle NML$ hamda $\angle MLK$ va $\angle MNK$ burchaklarning tengligidan (vatar ajratgan yoynlarning bittasidan shu vatarga tiralgan ichki burchaklar tengligi xossasi), ΔMXQ va ΔKZP hamda ΔLYQ va ΔNTP uchburchaklarning o'xshashligi kelib chiqadi. Shuning uchun

$$\frac{QX}{PZ} \cdot \frac{QY}{PT} = \frac{MQ}{KP} \cdot \frac{LQ}{NP}$$

Kesishuvchi vatarlar haqidagi teorema ko'ra

$$MQ \cdot LQ = AQ \cdot QB = (AC + CQ)(BC - CQ) = (AC + CQ)(AC - CQ) = AC^2 - CQ^2,$$

$$KP \cdot NP = BP \cdot AP = (BC + CP)(AC - CP) = (AC + CP) \cdot (AC - CP) = AC^2 - CP^2.$$

Bundan,

$$\frac{CQ^2}{CP^2} = \frac{AC^2 - CQ^2}{AC^2 - CP^2}$$

Ya'ni, $CQ = CP$ ekanligi kelib chiqadi.

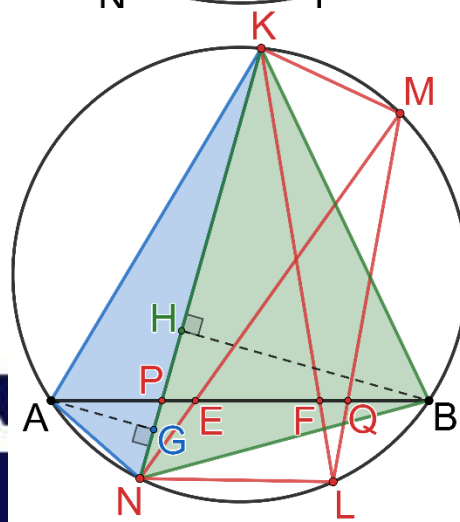
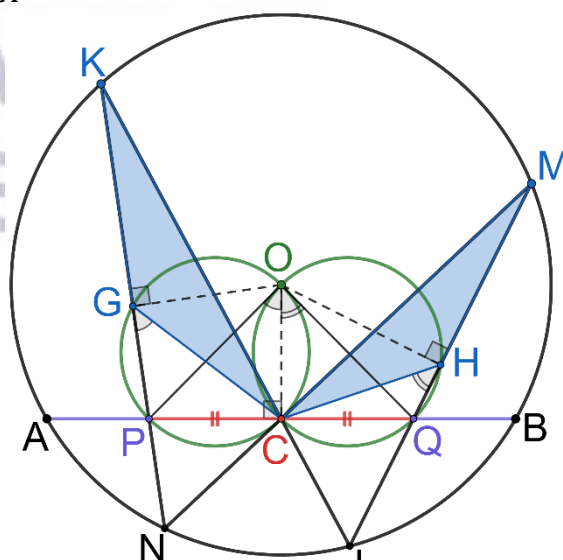
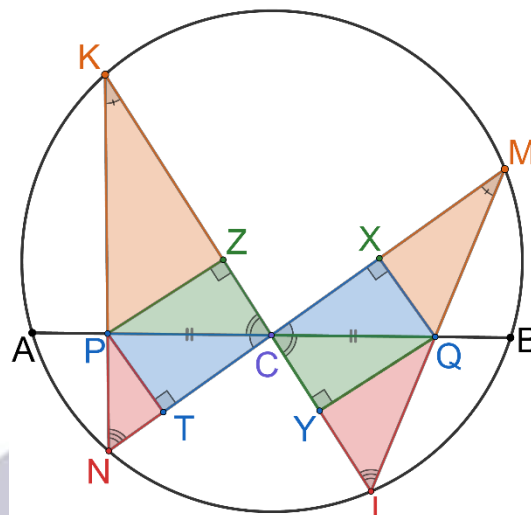
Teorema isbotlandi.

Ikkinchi usul. Aylana markazi O nuqtadan KN va ML kesmalarga mos ravishda OG va OH perpendikulyarlarni tushiramiz.

O, C, P, G nuqtalardan hamda O, C, Q, H nuqtalardan o'tuvchi ikkita aylana o'tkazamiz (diametrga tiralgan burchaklarni to'g'ri burchak bo'lishi shartidan yuqoridagi har qaysi to'rtta nuqtadan bittadan aylana o'tadi). Aylanaga ichki chizilgan burchaklar haqidagi teorema ko'ra $\angle COP = \angle CGP$ va $\angle COQ = \angle CHQ$ bo'ladi. ΔKCN va ΔMCL uchburchaklarning o'xshashligidan hamda CG va CH kesmalar mos ravishda ΔKCN va ΔMCL uchburchaklarning medianalari ekanidan ΔKCG va ΔMCH uchburchaklar ham o'xshash ekanini aniqlash mumkin. Shuning uchun

$$\angle CGP = \angle CHQ, \quad \angle COP = \angle COQ.$$

Demak, ΔPOQ uchburchakning CO balandligi bissektrisa ham ekan. Shundan ma'lumki ΔPOQ uchburchak teng yonli va bundan $PC = CQ$ ekani



kelib chiqadi. Masalani K, L, M va N nuqtalarning boshqa vaziyatlari uchun ham xuddi shu kabi isbotlash mumkin.

Teorema isbotlandi.

Uchinchi usul. AB vatar aylanaga ichki chizilgan $KMLN$ to'rtburchakning KN va LM qarama-qarshi tomonlarini hamda MN va KL diagonallarini mos ravishda P, Q, E va F nuqtalarda kesib o'tsin. Dastavval quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

Tasdiq. Faraz qilaylik,

$$\frac{AP}{PB} = \alpha, \quad \frac{AQ}{QB} = \beta, \quad \frac{AE}{EB} = x, \quad \frac{AF}{FB} = y$$

bo'lsin. U holda $\alpha\beta = xy$ bo'ladi.

$\triangle AKN$ va $\triangle BKN$ uchburchaklarning KN umumiy asosiga AG va BH balandliklarini tushirsak, $\triangle AGP$ va $\triangle BHP$ uchburchaklarning o'xshashligidan $\frac{AG}{BH} = \frac{AP}{BP}$ bo'ladi. Bundan ko'rinadiki $\frac{S_{AKN}}{S_{BKN}} = \frac{AP}{BP}$. Boshqa tarafda esa

$$\frac{S_{AKN}}{S_{BKN}} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AN \sin \angle KAN}{\frac{1}{2} BK \cdot BN \sin \angle KBN} = \frac{AK \cdot AN}{BK \cdot BN}$$

Bulardan, $\alpha = \frac{AP}{PB} = \frac{AK \cdot AN}{BK \cdot BN}$ tenglikni hosil qilamiz.

Xuddi shunday tartibda quyidagilarni isbotlaymiz:

$$\beta = \frac{AQ}{QB} = \frac{AM \cdot AL}{BM \cdot BL}; \quad x = \frac{AE}{EB} = \frac{AL \cdot AN}{BL \cdot BN}; \quad y = \frac{AF}{FB} = \frac{AK \cdot AM}{BK \cdot BM}$$

Ko'rinib turibdiki, $\alpha\beta = xy$. Tasdiq isbotlandi.

Endi masalaga qaytamiz. Bu holatda KL va MN diagonallar AB vatarining o'rtasi C nuqtada kesishadi, yuqoridagi tasdiq ko'ra E va F nuqtalar C nuqtada ustma-ust tushadi. Bu esa $x = \frac{AE}{EB} = 1$ va $y = \frac{AF}{FB} = 1$ ekanini anglatadi. U holda yuqorida isbotlangan tasdiqqa ko'ra $\alpha\beta = 1$, ya'ni

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{AQ}{QB} = 1, \quad \frac{AP}{AB-AP} \cdot \frac{AB-QB}{QB} = 1, \Rightarrow \frac{AP}{AB-AP} = \frac{QB}{AB-QB}$$

Bundan $AP = QB$ bo'lib,

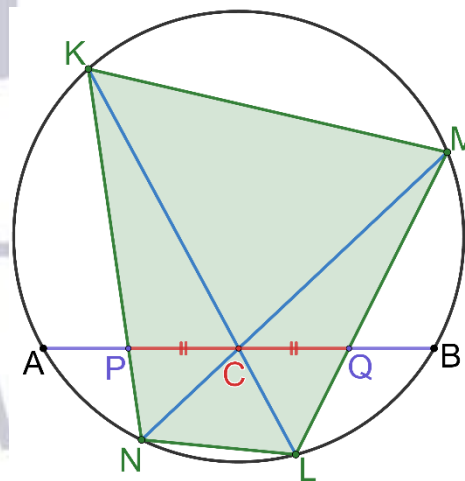
$$PC = AC - AP = BC - QB = CQ.$$

Teorema isbotlandi.

Teorema shartiga mos keluvchi chizma kapalak qanotiga o'xshashligidan ushbu teorema kapalak haqidagi teorema deb yuritiladi. Isbotlashga oid masalalarni o'rganuvchi maktab o'quvchilari, talabalar hamda matematikaga qiziquvchilar uchun ushbu kabi masalalar muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Ченцов Н. Н., Шклярский Д. О., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия). М.: Гостехиздат, 1952.



2. А.В. Погорелов. “Геометрия”. 7-11 синф дарслиги. Т. 1992.
3. Ҳ.Ҳ. Назаров, Х.О. Очилова, Е.Г. Подгорнова Геометриядан масалалар тўплами, 1-қисм, “Ўқитувчи” нашриёти, Т. 1997 й.



INNOVATIVE
ACADEMY